电子科技大学

2008年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目:611　数学分析

所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题(每小题5分，共40分)

1. 已知$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})$，$a_1=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________________.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=$________________.

3. 曲线$\begin{cases}x=t+2+\sin t\\ y=t+\cos t\end{cases}$在$x=2$处的切线方程为________________.

4. $x=y^2+y, u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$，则$\frac{dy}{du}=$________________.

5. 已知$y=\sin x, x=t^2$，则y的二阶微分$d^2y=$________________

6. 设$I(y)=\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}dx$，则$I'(y)=$________________.

7. 曲面S为上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2, z\geq 0$，则第一类曲面积分$\iint_S(2x^2+z^2)ds=$________.

8. 设$f(x)=\cos\alpha x$，$|x|<\pi$，其中$\alpha\neq 0$，则$f(x)$的Fourier级数为

________________________.

二、(12分) 证明：实数集$\mathbb{R}$是不可列的.

三、(12分) 证明：区间(a,b)上的单调函数的间断点是第一类间断点.

四、(12分) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二次可微，又$f(a)=f(b)=0$并且在区间(a,b)满足$|f''(x)|\leq M$，证明：$\forall x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leq\frac{M}{8}(b-a)^2$.

五、(12分) 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，$g(x)>0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b[f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leq x\leq b}f(x).$$

六、(12分) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛，$a_0=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

七、(12分) 证明不等式：$2\pi(\sqrt{17}-4)\leq\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\leq\frac{\pi}{4}$.

八、(12分) 设$f(u)$为连续函数，L为分段光滑的简单闭曲线，试证明：$\oint_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$.

九、(12分) 叙述含参变量积分$F(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$（$x\in I$）在区间$I$上一致收敛的定义，判断积分$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}dt$在区间$[0,1]$上是否一致收敛，试证明你的结论.

十、(14分) 设函数$f(x)$在实数集$\mathbb{R}$有定义，证明：$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续当且仅当$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha<\beta$，$f^{-1}((\alpha,\beta))$是一些开区间的并集.