电子科技大学

2009 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：835 线性代数

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷和草稿纸上均无效。

一(12 分). 设 $A=(a_{ij}), a_{ij}=|i-j|, i,j=1,\dots,n$，计算行列式 $|A|$.

二(15 分).设 4 阶矩阵 B 满足 $\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+E$，$E$ 表示单位矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$ 求 B.

三(20 分). 设 A 是 n 阶矩阵($n\geq 2$), A^*是 A 的伴随矩阵, $R(A)$表示 A 的秩. 证明:

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & 当R(A)=n;\\ 1, & 当R(A)=n\text{-}1;\\ 0, & 当R(A)<n\text{-}1.\end{cases}$$

四(15 分). 设有向量组(I): $\alpha_1=(1,0,2), \alpha_2=(1,1,3), \alpha_3=(1,-1,a+2)$. 向量组(II): $\beta_1=(1,2,a+3), \beta_2=(2,1,a+6), \beta_3=(2,1,a+4)$. 试问: 当 a 为何值时, 组(I)与组(II)等价? 当 a 为何值时, 组(I)与组(II)不等价?

五(18 分).设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量，$\alpha_n\neq 0$，若 $A\alpha_1=\alpha_2, A\alpha_2=\alpha_3\cdots, A\alpha_{n-1}=\alpha_n, A\alpha_n=0$.

1. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关； 2. 求 A 的特征值和特征向量.

六(16 分). 1. 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，属于$\lambda_i$的特征向量为 $\alpha_i(1\leq i\leq n)$，求 $P^{-1}AP$ 的特征值和特征向量；

2. 设 $f(x)$ 是一个多项式，A 是 n 阶可逆矩阵，特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求 $f(A^{-1})$ 的特征值.

七(10 分). 证明 n 维欧氏空间中的勾股定理: 向量 α 与 β 正交的充分必要条件是 $\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2=\|\alpha-\beta\|^2$.

八(12 分). 证明: 如果 n 维线性空间的两个线性子空间的维数之和大于 n, 则这两个子空间有公共的非零向量.

九(14 分). 设 W 为 $\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(2,1,2,3),\alpha_3=(0,1,-2,1)$ 张成的子空间, 求 W 的正交补 $W^{\perp}$ 的标准正交基.

十(18 分). 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基, 线性变换 T 在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. 求 T 在基 $\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵;
2. 求 T 的核;
3. 在 T 的核中选一组基, 把它扩充成 V 的一组基, 并求 T 在该基下的矩阵.