电子科技大学

2009年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：612 高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题（本题满分24分，每小题4分）

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2-1}}\sin\dfrac{1}{x}=$______.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=$__________.

(3) 定积分$\int_{-1}^{1}|x|(x^2+\sin^5 x)dx=$______________.

(4) 微分方程$\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-y}$满足初始条件$y(0)=0$的特解$y=$_______________.

(5) 设S为曲面$x^2+y^2+z^2=1$外侧，则曲面积分$\iint\limits_S zdxdy=$___________________.

(6) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}10^n(2x-1)^n$的收敛区间是________________.

二、单项选择题（本题满分24分，每小题4分）

(1) 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的(　　)条件.

(A)必要非充分； (B) 充分非必要； (C)充要； (D)既非充分也非必要.

(2) 设$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，则下列结论错误的是(　　).

(A) $x=-1,\ x=0,\ x=1$为间断点；　　(B) $x=-1$是无穷型间断点；

(C) $x=0$是可去型间断点;；　　(D) $x=1$是可去型间断点..

(3) 函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0, 0)(　　).

(A)连续且两个偏导数存在；　　(B)连续但两个偏导数不存在；

(C)两个偏导数存在但不连续；　　(D)不连续且两个偏导数也不存在.

(4) 设 D 是 xoy 面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 中在第一象限的部分，则二重积分 $\iint_D (x^3y+\cos^3 x\sin y)d\sigma=$（　　）.

（A）$2\iint_{D_1}\cos^3 x\sin y\,d\sigma$；（$B$）$2\iint_{D_1}x^3y\,d\sigma$；（$C$）$4\iint_{D_1}(x^3y+\cos^3 x\sin y)d\sigma$；（$D$）0.

(5) 设 f 有连续的一阶导数，则 $\int_{(0,0)}^{(1,2)} f(x+y)dx+f(x+y)dy=$（　　）

(A) $2\int_0^1 f(x)\,dx$；　(B) $\int_0^3 f(x)\,dx$；　(C) $f(3)-f(0)$；　(D) 0

(6) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=1$ 处收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处（　　）

(A) 绝对收敛；　(B) 条件收敛；(C) 发散；　(D) 收敛性与 a_n 有关.

三、（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$F(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)\,dt\ (a>0)$，$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，试解答下列问题：（1）用 $G(x)$ 表示 $F(x)$；（2）求证：$\lim\limits_{a\to 0}F(x)=f(x)$；（3）设 $f(x)$ 在 $[x-a,x+a]$ 内的最大值和最小值分别是 M、m，求证：$|F(x)-f(x)|\le M-m$.

四、（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+(y+1)^2\le 1$ 与 $y\ge -x$ 所确定的区域.

五、（本题满分 10 分）

设 $f''(x)<0,\ 0\le x\le 1$，证明 $\int_0^1 f(x^2)dx\le f(\frac{1}{3})$.

六、（本题满分 10 分）

求满足方程 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 的函数 $f(x)$，已知 $f'(0)$ 存在.

七、（本题满分 10 分）

设 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，求证：曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面都通过某一定点(其中 a,b,c 为常数).

八、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 可微，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$，

求 $f(x,y)$.

九、（本题满分 10 分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，当 $n>1$ 时 $a_{n-2}=n(n-1)a_n$，且 $a_0=4,\ a_1=1$；

（1）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$；（2）求和函数 $S(x)$ 的极值..

十、（本题满分 10 分）

设 $\Omega=\{(x,y,z)\in R^3\mid -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le 0,a>0\}$，$S$ 为 Ω 的边界曲面外侧，计算

$$I=\oiint\limits_S \frac{ax\,dydz+2(x+a)y\,dzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}.$$

十一、（本题满分 11 分）

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=a$，$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，求证:$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

十二、（本题满分 11 分）

设 $|a_n|\le 1$.且 $|a_n-a_{n-1}|\le\frac{1}{4}|a_{n-1}^2-a_{n-2}^2|\,(n\in N)$，求证：

（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛；　　（2）数列 $\{a_n\}$ 收敛.