电子科技大学

2009 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：611　数学分析

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知 $a_1=\sqrt{5}$，$a_n=\sqrt{5+a_{n-1}}$　$(n=2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$____________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{x+1}}=$____________.

3. 曲线 $y=\ln(1-x^2), 0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的弧长为____________.

4. $x^y=y^x$，则 $y'(1)=$____________.

5. 已知 $x^2y+xy^2=1$，x 为自变量，则 $d^2y=$____________.

6. 当 $a=$______，$b=$______ 时，区间 $[a,b]$ 上的积分 $\int_a^b(2+x-x^2)dx$ 的值最大.

7. 设 $b>a>0$，则含参变量积分 $\int_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ 的值为____________.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, & x\in[-\pi,0)\\ \cos x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$ 的 Fourier 级数在 $x=0$ 点值为____________.

9. 若 D 为抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_D xydxdy=$__________.

10. 设 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截三角形 Σ 的边界，若从 x 轴的正向去，L 的定向为逆时针方向，曲线积分 $\oint_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$ 的值为_______.

二、（12 分） 若数列 $\{x_n\}$ 无界，但非无穷大量，证明：存在子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$，其中 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 是无穷大量，而 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 是收敛子列.

三、（12 分） 证明：对于 $\forall r\in(0,1)$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(r,1)$ 一致连续，而在区间 $(0,1)$ 不一致连续.

四、（12 分） 证明：Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}(q\in\square, p\in\square\setminus\{0\}\\ 1, \quad x=0\\ 0, \quad x\text{是无理数}\end{cases}$ 在无理点处处连续，而在有理点处处不连续. 其中：□ 是自然数集，□ 是整数集.

五、（12 分）证明：极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在当且仅当对于任何数列 $\{x_n\}$： $x_n \neq a$ $(\forall n\in □)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在.

六、（12 分）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛并且对于 $\forall n\in □$，$a_n \geq a_{n+1} > 0$，试证明：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

七、（12 分）设 $f(x,y)$ 是在 $D: x^2+y^2 \leq a^2$ 上具有连续的一阶偏导数的非负函数，并且在 D 的边界上处处取值为零，证明：

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \frac{1}{3}\pi a^3 \max_{(x,y)\in D}\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}$$

八、（12 分）证明：含参变量的积分 $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x}}dx$ 关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛，其中 $y_0 > 0$.

九、（12 分）设函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 都在 $□^3$ 上具有连续偏导数，且对于任意光滑曲面 Σ 有 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = 0$，证明：在 $□^3$ 上，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0.$$

十、（14 分）设二元函数 $f(x,y)$ 在正方形区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，记 $I=[0,1]$.

（1）试比较 $\inf\limits_{x\in I}\sup\limits_{y\in I} f(x,y)$ 与 $\sup\limits_{y\in I}\inf\limits_{x\in I} f(x,y)$ 的大小，并证明你的结论；

（2）证明：如果 $f(x,y)$ 关于二变量之一是一致单调递增（或者一致单调递减）的，则 $\inf\limits_{y\in I}\sup\limits_{x\in I} f(x,y) = \sup\limits_{y\in I}\inf\limits_{x\in I} f(x,y)$.

注释：称 $f(x,y)$ 关于 x 是一致单调递增（一致单调递减）的，如果对于 $\forall y\in I$，$f(x,y)$ 是关于 x 的单调递增（单调递减）函数.