电子科技大学

2010 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：835　线性代数

注：所有答案必须写在答卷纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一(13 分). 计算 5 阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

二(13 分). 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，求行列式$|A|$的所有元素的代数余子式之和.

三(13 分). 设秩($A_{m\times n}$)=$r>0$. 证明：存在秩为 r 的 $m\times r$ 矩阵 F 与秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 G，使 $A=FG$.

四(20 分). 已知齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1+x_2+\quad\ +x_4=0 \\ ax_1+\quad\ +a^2x_3\quad=0 \\ \quad\ ax_2+\quad\ a^2x_4=0 \end{cases}$ 的解都满足方程 $x_1+x_2+x_3=0$，求 a 和方程组(I)的通解.

五(14 分). 设 A 为 r 阶矩阵，B 为 $r\times n$ 矩阵，秩(B)=r，证明：

(1) 若 $AB=0$，则 $A=0$;

(2) 若 $AB=B$，则 $A=E$ (单位阵).

六(13 分). 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A=0$，$r(A)=k$. 求行列式 $|A+3E|$.

七(15 分). 设二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求出 k，并写出 f 的标准形 (即平方和);

(2) 问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表三维几何空间中何种几何曲面？

(3) 求 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下的最大值和最小值.

八(14 分). 设 U 是线性空间 V 的一个真子空间，问 V 中适合 $V=U+W$ 的子空间 W 是否惟一？说明理由.

九(20 分). 设 V 是由所有 2 阶实方阵构成的实线性空间. 在定义内积 $(X,Y)=\operatorname{tr} XY^T$ 后，V 成为一个欧氏空间. 现定义 V 上的变换 $\mathrm{A}: X \mapsto X+X^T$.

（1）证明：A 是一个线性变换；

（2）求 A 在基 $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ 下的表示矩阵；

（3）求 A 的所有特征值与特征向量；

（4）求 V 的一组标准正交基，使得 A 在此基下的表示矩阵为对角阵.

十(15 分). 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\\x_1+5x_2+3x_3+3x_4=0\end{cases}$ 的解空间 S，并求 S 在 R^4 中的正交补 $S^{\perp}$.