电子科技大学

2010年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：612 高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题（本题满分24分，每小题4分）

(1) 设函数$f(x)$与$g(x)$在$x=0$的某邻域可求任意阶导数，且满足
$f''(x)+f'(x)g(x)+f(x)x=e^x-1, f(0)=1, f'(0)=0$,
则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^4}=$(　　　　).

(2) 设平面区域$D(t)=\{(x,y)|1\le x\le y^2, 1\le y\le t\}$，二重积分$F(t)=\iint\limits_{D(t)}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}\sigma$，则$F''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　　　　）.

(3) 积分$\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=$(　　　　)..

(4) 设曲线$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$,取逆时针方向,则$\oint_C(9x^2+4y^2)(|y|\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=$(　　　　).

(5) 设由$F(x,y,z)=0$确定二元函数$z=f(x,y)$，且$\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1, \left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2, \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=1$,

则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=$（　　　　）.

(6) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 3^n+(-2)^n}$的收敛区间为(　　　　).

二、单项选择题（本题满分24分，每小题4分）

(1) 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义，且$f(0,0)=0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处（　　　　）.

（A）极限存在但不连续　　（B）连续但偏导数不存在

（C）偏导数存在但不可微　　（D）可微

(2) 方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的一个特解具有形式（　　　　　）.

（A）$(Ax+B)e^{2x}$　　（B）Axe^{2x}　　（C）Ax^2e^{2x}　　（D）$x(Ax+B)e^{2x}$

(3) 设D是中心在原点, 半径为r的圆所围成的区域, 则$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=($　　　　$)$.

$(A)0$;　$(B)\infty$;　$(C)1$;　$(D)e$.

(4) 过点$(1,1)$的直线$y=f(x)$中, 使得$\int_0^2\left[x^2-f(x)\right]dx$为最小的直线方程是(　　　　).

$(A)y=3x-1$;　　$(B)y=3x+1$;

$(C)y=2x-1$;　　$(D)y=2x+1$.

(5). 设$f(x)$可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的(　　　　).

(A)必要非充分; (B)充分非必要;

(C)充要; (D)既非充分也非必要.

(6) 级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$, 当$\alpha$满足什么条件时该级数发散(　　　　).

$(A)\alpha=1$;　　$(B)\alpha<1$;

$(C)\alpha\le\dfrac{1}{2}$;　　$(D)\alpha=\dfrac{1}{2}$.

三、(本题满分 10 分)

已知$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$有二阶连续偏导数, 且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$, 试求$u(x,y)$.

四、(本题满分 10 分)

设$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有二阶导数, 且$|f''(x)|\le M$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛.

五、(本题满分 10 分)

设$f(x)$为非负连续函数, 当$x\ge 0$时, 有$\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t=e^{2x}-1$, 求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 10 分)

设$\varphi(x)$具有连续的导数, 且$\varphi(1)=2$, L为曲线弧$(x-1)^2+y^2=1$在第一象限部分自点 (0, 0) 至点 (1, 1) .求

$\int_L(x^2y+\varphi'(x)y^3)\mathrm{d}x+(3\varphi(x)y^2-xy^2)\mathrm{d}y$.

七、(本题满分 10 分)

求微分方程$xy'+ay=1+x^2$满足初始条件$y(1)=1$的解$y(x,a)$, 其中a为参数,

并证明$\lim\limits_{a\to 0}y(x,a)$是方程$xy'=1+x^2$的解.

八、（本题满分 10 分）

计算$I=\iint\limits_{S}(8y+1)xdydz+2\left(1-y^2\right)dzdx-4yzdxdy$,其中$S$是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$

绕y轴旋转一周所成的曲面，其法向量与y轴正向夹角大于$\dfrac{\pi}{2}$.

九、（本题满分 10 分）

试证明：$\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{5}x=10-x \quad (5<x<15)$.

十、（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=1$,

求证：存在两点$\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\ne\eta$,，使. $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$.

十一、（本题满分 11 分）

已知平面区域$D=\left\{(x.y)\middle|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\right\}$, L为D的正向边界.

试证:

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$.

十二、（本题满分 11 分）

设 $f(x)\in D[0,\ 1]$，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，求证：

$\exists\xi\in(0,\ 1)$，使得$\xi f'(\xi)=-f(\xi)$.