# 电子科技大学

# 2010年攻读硕士学位研究生入学试题参考答案

# 考试科目：611 数学分析

注：所有答案必须写在答题纸上。写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题(每小题4分，共20分)

1、$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan x}{(x+2)\sin^2\sqrt{x}}=$________.

2. 当$a=$________并且 $b=$________时，定积分$\int_a^b(2+x-x^2)dx$的值最大.

3. 设$z=\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}$，则$dz=$________.

4. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛区间为________，和函数$f(x)=$________.

5. 符号函数$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$在$[-\pi,\pi]$上展开的 Fourier 级数为________.

二、(10分) 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在当且仅当$\forall\{x_n\}:x_n\to x_0(n\to\infty)$，$x_n\neq x_0$ $(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在.

三、(12分) 设$f(x)$和$g(x)$都是区间$I$上的一致连续函数，试问：$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$\forall x\in I$，$g(x)\neq 0$）在区间$I$上是否一定一致连续？请证明你的结论.

四、(12分) 设$f(x)$在$[a,b]$具有二阶导数，$b(x)$和$c(x)$在$[a,b]$连续并且$\forall x\in[a,b]$，恒有$c(x)<0$，试证明：

1）如果$f''(x_0)+b(x_0)f'(x_0)+c(x_0)f(x_0)=0$，其中$x_0\in(a,b)$，则$f(x)$在$x_0$点不可能取正的最大值，也不可能取负的最小值；

2）有人说：如果等式$f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)=0$在区间$[a,b]$恒成立并且$f(a)=f(b)$，则$f(x)$在$[a,b]$恒等于一个常数. 你认为，这一结论成立吗？请证明你的结果..

五、(12分) 设$z=z(x,y)$是由$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的函数，求$z=z(x,y)$的极值点和极值.

六、(12分) 设 $\varphi(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期为1的周期函数，且$\int_0^1\varphi(x)dx=0$，$f(x)$在

$[0,1]$ 可微并且具有一阶连续导数，$a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)dx$，$n=1,2,\cdots$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

七、(12 分) 求曲面 $z=e^{-x^2-y^2+2y-1}$ 与平面 $z=\frac{1}{e}$ 围成立体体积.

八、(12 分) 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，证明：$1\le\iint_D[\sin(x^2)+\cos(x^2)]dxdy\le\sqrt{2}$.

九、(12 分) 设函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上具有连续偏导数，并且对于任意光滑曲面 $\Sigma$，有 $\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$，证明：在 $\mathbb{R}^3$ 上恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0.$$

十、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，并且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

十一、(12 分) 设 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且 $S(1)=0$. 证明：$\{x^nS(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

十二、(12 分) 计算积分 $g(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}dx$.