电子科技大学

2011 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目 835 线性代数

注意事项：1、所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效.

2、 十个大题，150 分.

一(13 分). 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}_{n+1}$ 。

二(15 分). 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$，其中 I 为单位矩阵。求矩阵 X。

三(11 分). 证明：矩阵的非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的。

四(12 分). 怎样的线性方程组给出（产生）空间中三个没有公共点但两两相交的平面？详细说明理由。

五(15 分). 如果向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是线性方程组(1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵的行向量组 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 的线性组合，则方程组(1)的解都是方程(2):

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0 \tag{2}$$

的解。

六(16 分). 已知 $\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量。

1. 试确定参数 a,b 及特征向量 ξ 所对应的特征值；

2. 问 A 能否相似于对角矩阵？说明理由。

七(15 分). 证明：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 在 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值恰为实对称矩阵 A 的最大特征值。

八(20 分). 设 P^3 的线性变换 $\mathcal{A}(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$.

1. 求$\mathcal{A}$的值域$\mathcal{A}(P^3)$的维数和一组基；

2. 求$\mathcal{A}$的核$\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的维数和一组基.

九(21 分). 已知欧式空间 $R^{2\times2}$ 的线性变换为

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{12}+x_{21} & x_{11}+x_{22} \\ x_{11}+x_{22} & x_{12}+x_{21} \end{pmatrix}, \qquad \forall\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\in R^{2\times2}。$$

1. 证明$\mathcal{A}$是对称变换；

2. 求 $R^{2\times2}$ 的一组标准正交基，使$\mathcal{A}$在该基下的矩阵为对角矩阵。

十(12 分). 证明：n 维线性空间 V 的任一子空间 W 是某一线性变换$\mathcal{A}$的象集。