电子科技大学

2011 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：688 单独考试高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、选择题（每小题 4 分，共 32 分，只有一项符合题目要求）

1. 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{\cos x}$ 与 $\beta(x)=kx^2$ 是等价无穷小，则 $k=$ ……（　　）.

(A) $\frac{1}{4}$；　(B) $\frac{1}{2}$；　(C) $\frac{3}{4}$；　(D) 1.

2. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$ ……………………………（　　）

(A) e；　(B) $2e$；　(C) $3e$；　(D) $4e$.

3. 设 $y=x\ln x$，则 $f^{(n)}(x)=$ ……………………………………………………（　　）.

(A) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}$；　(B) $(-1)^{n-1}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$；　(C) $(-1)^{n}\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}$；　(D) $(-1)^{n}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$.

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ……………………………………………（　　）

(A) $\frac{\pi}{8}$；　(B) $\frac{\pi}{4}$；　(C) $\frac{\pi}{2}$；　(D) π.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{xy}\sin x^2y, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ ……………………………（　　）.

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 不存在.

6. 设函数 $u(x,y)=x^2-xy+y^2$，点 $M(1,1)$，则其梯度 $\mathrm{grad}u|_M=$ ………（　　）.

(A) $\vec{i}+\vec{j}$；　(B) $2\vec{i}+\vec{j}$；　(C) $\vec{i}-\vec{j}$；　(D) $2\vec{i}-\vec{j}$.

7. 设 $f(u)$ 连续，$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ………………（　　）.

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\,\mathrm{d}y$；　(B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\,\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$；　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$.

8. 设 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分，则 $\iint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{(x+y+z)^2}=$ ……………（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$；　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）：

9.. $f(x)=\dfrac{x}{\tan x},x\in(-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 有可去间断点 $x=$______ ,无穷间断点 $x=$______ .

10. 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}$ $=$ ________ .

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$________ .

12. 设 $z=f(xy,x)$，f 具有连续二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

13. 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\displaystyle\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$______.

14. 周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则

$S(\pi)=$________.

三、解答题（共 94 分）：

15. （10 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}\mathrm{d}u\end{cases}$ $(t>1)$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=5}$.

16. （10 分）计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x.$

17. （11 分）已知 $f(x,y)=x^2-y^2+2.$，求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\}$

上的最大值和最小值.

18. （10 分）计算曲线积分 $\displaystyle\int_L(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周

$y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段弧.

19. （10 分）计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S(x+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面

$z=x^2+y^2$ $(1\le z\le 4)$ 的下侧.

20. (11 分) 求微分方程 $y''+y=\cos x$ 满足初值条件 $y(0)=0,y'(0)=0$ 的特解.

21. (10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ ，试将 $f(x)$ 展成 x 的幂级数.,并

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

22. (10 分) 设函数 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，证明：曲面 $F\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)=0$ 上任

意一点处的切平面都通过某一定点.

23. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=1$,， 且满足等式

$$f'(x)+f(x)=\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(1) 求导函数 $f'(x)$； (2) 证明：当 $x\geq 0$ 时， $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$.