2011 年电子科技大学硕士研究生入学考试试题及答案

考试科目：602 高等数学

一、填空题（本题满分 24 分，每小题 4 分）

(1). 设$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}$，其中$a>0,b>0,c>0$，则$\lambda=(\quad)$.

（2）微分方程 $y''+16y=\sin(4x+\alpha)$（其中 α 为常数）的特解形式为 $y^{*}=(\qquad)$.

（3）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx=(\quad)$.

(4). 设广义积分 $A=\int_{0}^{1}\dfrac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$，$B=\int_{0}^{1}\dfrac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x$，则$A$与$B$满足的关系为$(\quad)$.

（5）设$\vec{n}$是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量，则函数$u=\dfrac{1}{z}\left(6x^2+8y^2\right)^{\frac{1}{2}}$在此处沿方向$\vec{n}$的方向导数$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{P}=(\quad)$.

(6). 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=(\quad)$.

参考答案一、（1）$\sqrt[3]{abc}$ （2）$x(A\cos 4x+B\sin 4x)$ （3）$\ln\sqrt{3}$

（4）$A=2B$ （5）$\dfrac{11}{7}$ （6）36.

二、单项选择题（本题满分 24 分，每小题 4 分）

(1). 设$f(r),g(Z)$连续，又满足$f(0)=0,f'(0)=3,g(0)=1$，$\Omega(t)$为区域：

$x^2+y^2\le t^2,-t\le z\le t,t>0$，则$I=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(\sqrt{x^2+y^2})g(z)dV}{t^4}=(\quad)$.

$(A)0.$ $(B)2\pi.$ $(C)3\pi.$ $(D)4\pi.$

（2）若当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处（　　）.

（A）不可导;　　　　（B）可导且 $f'(a)\neq 0$;

（C）有极大值;　　　　（D）有极小值.

(3).下列二元函数在点 $(0,0)$ 处可微的是(　　).

$(A) f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

$(B) f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

$(C) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$　　$(D) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(4).使得 $\int[(2x^4-1)\cos x+(8x^3-x^2-1)\sin x]dx=P(x)\cos x+Q(x)\sin x+C$

的代数式 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为(　　)

$(A)P(x)=x^2+1,\ Q(x)=2x^4-2x-1$;　$(B)P(x)=x^3+1,\ Q(x)=2x^4-2x+1$;

$(C)P(x)=x^2+1$, $Q(x)$ 不存在;　　$(D)Q(x)=2x^4-2x-1$, $P(x)$ 不存在.

（5）二次积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy$ 改变积分次序后为（　　）.

（A）$\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$;　　（$B$）$-\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$;

（C）$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　（D）$-\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

(6). 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义，且在 $x=1$ 点可导，并已知 $f(1)=0, f'(1)=2$.

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos^2 x)}{x^2+x\tan x}=($　　$)$.

$(A)-\dfrac{1}{2}$;　$(B)-1$;　$(C)1$;　$(D)\dfrac{1}{2}$.

二、参考答案　(1) D;(2) C;(3) B;(4) A;(5) D;(6) D.

三、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, A 为常数，

求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0, g(0)=0$.

令$u=xt$,得$g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}(x\neq 0)$,

从而$g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}(x\neq 0)$.

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=g'(0)$

从而知$g'(x)$在$x=0$处连续.

四、(本题满分 10 分)

设 xoy 平面上有正方形$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$及直线$l:x+y=t\ (t\ge 0)$. 若$S(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积,试求积分$\int_0^x S(t)dt\ (x\ge 0)$.

解 $$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\le t\le 1\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\le 2\\ 1, & t>2\end{cases}$$

当$0\le x\le 1$时, $\int_0^x S(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}t^2dt=\frac{1}{6}x^3$,

当$1<x\le 2$时, $\int_0^x S(t)dt=\int_0^1 S(t)dt+\int_1^x S(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}t^2dt+\int_1^x(-\frac{1}{2}t^2+2t-1)dt$

$=-\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}$,

当$x>2$时, $\int_0^x S(t)dt=\int_0^2 S(t)dt+\int_2^x S(t)dt=x-1$,

$$\therefore \int_0^x S(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \le xt \le 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \le 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$$

五、（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f(a)=f(b)=0$，且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$.

证明：方程$f'(x)=0$在(a,b)至少有两个实根.

证明：由题设知$f'_+(a)$和$f'_-(b)$都存在且同号，不妨设$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$由$f(a)=f(b)=0$，

故$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$.

根据函数极限的局部保号性知，存在$x_1>a$，使$\dfrac{f(x_1)}{x-a}>0$，从而$f(x_1)>0$.

同理由$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$.

由局部保号性知，存在$x_2<b$，使$\dfrac{f(x_2)}{x_2-b}>0$，从而$f(x_2)<0$.

$\because f(x)\in C[x_1,x_2]$，$\therefore$由零点存在定理知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使$f(\xi)=0$.

又由于$f(x)$在$[a,\xi]$上满中*Rolle* *Th*的条件，$\therefore\exists\xi_1\in(a,\xi)\subset(a,b)$，使$f'(\xi_1)=0$.

同理，$\exists\xi_2\in(\xi,b)\subset(a,b)$，使$f'(\xi_2)=0$.

故方程$f'(x)$在(a,b)内至少有两个实根.

六、（本题满分 10 分）

设函数$u(x)$是由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$所确定，且$\dfrac{\partial g}{\partial y}\ne 0$，$\dfrac{\partial h}{\partial z}\ne 0$，试求$\dfrac{du}{dx}$.

解 方程组各方程两边对x求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx}=f_x+f_y\dfrac{dy}{dx}, & (1) \\ g_x+g_y\cdot\dfrac{dy}{dx}+g_z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0, & (2) \\ h_x+h_z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{h_x}{h_z}$，代入(2)得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g_z\cdot h_x}{g_y\cdot h_z}-\dfrac{g_x}{g_y}$，

代入(1)得 $\dfrac{du}{dx}=f_x-\dfrac{f_y\cdot g_x}{g_y}+\dfrac{f_y\cdot g_z\cdot h_x}{g_y\cdot h_z}$.

七、（本题满分 10 分）

设l是过原点，方向为(α,β,γ)（其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$（其中$0<c<b<a$，密度为1）绕$l$旋转.

（1） 求其转动惯量；（2）求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

解（1）设旋转轴l的方向向量为 $\vec{s}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点$P(x,y,z)$的径向量为 $\vec{r}$ ，则点P到旋转轴l的的平方为

$d^2=\vec{r}^2-(\vec{r}\cdot\vec{s})^2=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$ 由积分区域的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Omega}(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)dxdydz=0，\text{其中}\ \Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}$$

而 $$\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}dydz=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}$$

（或 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi dr=\dfrac{4a^3bc\pi}{15}$）

$$\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz=\frac{4ab^3c\pi}{15},\ \iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\frac{4abc^3\pi}{15}$$

由转到惯量的定义

$$J_l=\iiint\limits_{\Omega}d^2dxdydz=\frac{4abc\pi}{15}\left((1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right)$$

（2）考虑目标函数$V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$在约束$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)$

令

$L_\alpha = 2\alpha(\lambda - a^2) = 0, L_\beta = 2\beta(\lambda - b^2) = 0, L_\gamma = 2\gamma(\lambda - c^2) = 0,\ L_\lambda = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$

解得极值点为 $Q_1(\pm1, 0, 0, a^2), Q_2(0, \pm1, o, b^2), Q_3(0, 0, \pm1, c^2)$

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，为 $J_{\max} = \dfrac{4abc\pi}{15}(a^2 + b^2)$；绕 x 轴（长轴）的转动惯量最小，为 $J_{\min} = \dfrac{4abc\pi}{15}(b^2 + c^2)$.

八、（本题满分 10 分）

已知L是平面上任意一条简单闭曲线，问 a 为何值时曲线积分$\oint_L \dfrac{xdx - aydy}{x^2 + y^2} = 0$.

解 $P = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$，$Q = \dfrac{-ay}{x^2 + y^2}, \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2axy}{(x^2 + y^2)^2}$，

(1)当L不包围原点时，$x^2 + y^2 \neq 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$连续,当$a = -1$时，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \oint_L \dfrac{xdx - aydy}{x^2 + y^2} = 0$.

(2)当L包围原点时，作$l: x = \delta\cos\theta$，$y = \delta\sin\theta$，

$$\oint_L = \oint_l = \int_0^{2\pi} \frac{\delta\cos\theta(-\delta\sin\theta) - a\delta\sin\theta(\delta\cos\theta)}{\delta^2} d\theta = -\frac{1+a}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta = -\frac{1+a}{2}\cdot 0 = 0,$$

$\therefore$ 对任意a，有$\oint_L \dfrac{xdx - aydy}{x^2 + y^2} = 0$.

九、（本题满分 10 分）

计算 $I = \iint\limits_S \dfrac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2 + z^2}} dzdx$，其中 S 为曲面 $y^2 = x^2 + z^2$ 与平面 $y = 1, y = 2$ 所围立体的表面外侧.

解 $S_1: y=1$, 左侧; $D_1: x^2+z^2\le 1$

$S_2: y=\sqrt{x^2+z^2}$, 左侧; $D_2: 1\le x^2+z^2\le 4$

$S_3: y=2$, 右侧; $D_3: x^2+z^2\le 4$

$$\iint\limits_{S_1}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=-\iint\limits_{D_1}\frac{e}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{e}{r}\cdot rdr=-2\pi e,$$

$$\iint\limits_{S_3}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=\iint\limits_{D_3}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{e^{\sqrt{2}}}{r}\cdot rdr=4\pi e^{\sqrt{2}},$$

$$\iint\limits_{S_2}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=-\iint\limits_{D_2}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{e^r}{r}\cdot rdr=-2\pi(e^2-e),$$

$$I=\iint\limits_{S}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dzdx=2\pi(2e^{\sqrt{2}}-e^2).$$

十、(本题满分 11 分)

设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$, (1)求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$的值;

(2)试证:对任意常数$\lambda>0$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.

解(1) $\because \frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(1+\tan^2 x\right)dx$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore S_n=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$

(2) $\because a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx\ge 0,\ a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$

$\therefore \frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{a_n+a_{n+2}}{n^\lambda}=\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$

$\because \lambda>0$, $\therefore \lambda+1>1$, 故原级数收敛.

十一、(本题满分 11 分)

设$\varphi(x)$具有连续的导数,且$\varphi(1)=2$, L为曲线弧$(x-1)^2+y^2=1$在第一象限部分自点(0, 0)至点(1, 1).求$\int_L(x^2y+\varphi'(x)y^3)dx+(3\varphi(x)y^2-xy^2)dy$.

[详解] $\int_L\varphi'(x^2y+\varphi'(x)y^3)\mathrm{d}x+(3\varphi(x)y^2-xy^2)\mathrm{d}y$

$$=\int_L \varphi'(x)y^3\,dx+3\varphi(x)y^2\,dy+\int_L x^2y\,dx-xy^2\,dy$$

第一个积分由原函数法，有

$$\int_L \varphi'(x)y^3\,dx+3\varphi(x)y^2\,dy=\int_L d\varphi(x)y^3=\varphi(x)y^3\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}$$
$$=\varphi(1)=2$$

第二个积分用参数，L 的参数方程为

$$x=1+\cos t,\ \ y=\sin t,\ t\text{ 从 }\pi\text{ 到 }\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\int_L x^2y\,dx-xy^2\,dy=-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+3\cos t\sin^2 t+2\sin^2 t\cos^2 t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi-1$$

最后，原积分$=1+\frac{3}{8}\pi$.

十二、（本题满分 10 分）

证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

证 令$F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$,则$F'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0$,

$\Rightarrow F(x)=C$, $\because F(0)=f(0)=1$, $\therefore F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}=1,\Rightarrow f(x)=e^x$.