电子科技大学
2011年攻读硕士学位研究生入学试题
考试科目：601 数学分析

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题(每小题4分，共40分)

1. 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x}=$________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0 \\ \cos\frac{\pi}{2}x, & x<0 \end{cases}$，则 $\int_0^2 f(x-1)dx=$________.

4. 由方程 $e^z-xyz=0$ 所确定的隐函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

5. 曲线 $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ 在拐点处的切线方程为________.

6. 数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和为________.

7. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，平面 $x+y=1$ 及三个坐标面所围成的立体的体积为________.

8. 若曲线 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，则第一类曲线积分 $\oint_L |x|^{\frac{1}{3}}ds=$________.

9. 设 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧，则第二类曲线积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy=$________.

10. 函数 $f(x)=\begin{cases} 1, x\in[-\pi,0) \\ -1, x\in[0,\pi) \end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数为________.

二、(12分) 当 $x\to+\infty$ 时，下列变量都是无穷大量，试将它们从低阶到高阶进行排列，并说明理由.

$$a^x\ (a>1),\ x^x,\ x^\alpha\ (\alpha>0),\ \ln^k x\ (k>0),\ [x]!$$

其中：a，α，k 都是常数.

三、(12分) 求证列三问题：(1) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 连续，证明：$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 与 $\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也连续；(2) 设 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是同一个区间上的连续函数，令 f 的值 $f(x)$ 等于三值 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 中介于其他二值之间的那个值，证明：f 在 $[a,b]$ 上连续；(3) 如果令 $u_n(x)=\begin{cases} x, & |x|\le n \\ n\cdot\mathrm{sgn}(x), & |x|>n \end{cases}$ 并且 f 为实函数，证明：$f(x)$ 连续的充要条件对任何自然数 n，

$g_n(x)=u_n[f(x)]$都是连续函数.

四、（12 分）设$f(0)=0$并且导数$f'(x)$在$(0,+\infty)$单调增加，证明：在$(0,+\infty)$内，函数$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$是单调增加的.

五、（12 分）设$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t}} e^{-\frac{tx}{y^2}}dxdy$，求$F'(0)$.

六、（12 分）证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$在$[0,1]$上一致收敛，并讨论其和函数在$[0,1]$上的连续性、可积性与可导性.

七、（12 分）当$x>-1$时，$f(x)$连续、可微并且$f(0)=\dfrac{6}{5}$，对半平面$x>-1$上的任一闭曲线，有$\oint_L[y-5ye^{-2x}f(x)]dx+e^{-2x}f(x)dy=0$，试求$f(x)$并且计算

$$\int_L[y-5ye^{-2x}f(x)]dx+e^{-2x}f(x)dy.$$

其中：L为从点$(1,0)$到点$(2,3)$的弧段.

八、（12 分）证明含参变量的积分$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x dx$在任何有限区间$[a,b]$上都一致收敛.

九、（12 分）计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中：$\Sigma$是抛物面$1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}$（$z\ge0$），方向取上侧.

十、（14 分）设函数$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续. 如果对于$\forall x>0$，有$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(x+n)=C$，试证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=C$. 其中$C$为一个常数.