2000年四川联合大学数学试题

2000年四川联合大学数学试题

一、选择题（每小题3分，共15分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）

(A) 可导，　　(B) 极限不存在

(C) 极限存在但不连续　　(D) 连续但不可导

2. 设有方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$，则在 $(0,+\infty)$ 上方程（ ）

(A) 无实根　　(B) 有两个实根

(C) 有无穷多实根　　(D) 有唯一实根

3. 设 $f(x)$ 在 R 上连续，且在 $x\neq 0$ 时可导，又设

$F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)$（ ）

(A) 在 $x=0$ 处不可导　　(B) $F'(0)$ 存在，但 $F''(0)$ 不存在

(C) $F'(x)$ 不连续　　(D) $F''(0)=2f(0)$

4. 设 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随阵，则行列式 $\left||A|A^*\right|=$（ ）

(A) $|A|^2$　(B) $|A|^n$　(C) $|A|^{2n}$　(D) $|A|^{2n-1}$

5. 设随机变量ξ可取无穷多个值$0, 1, 2, \cdots$，其概率分布为$p(k,3)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}$，$k=0,1,2,\cdots$，则下列各式中成立的是（　）

(A) $E(\xi)=D(\xi)=3$　(B) $E(\xi)=D(\xi)=\frac{1}{3}$　(C) $E(\xi)=3$，$D(\xi)=\frac{1}{3}$

(D) $E(\xi)=\frac{1}{3}$，$D(\xi)=9$

二、填空题（每小题3分，共15分。）

1、设$f(x)=e^{\sin(2x-3)\pi}$，则$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=$______.

2、设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\lambda x}=\int_{-\infty}^{\lambda} te^{t}dt$，则$\lambda=$______.

3. $\int_{-1}^{1}\frac{x+|x|}{1+x^2}dx=$______.

4、设$z=x^2f\left(\frac{y}{x}\right)$，其中$f$是可微函数，则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\_\_\_\_\_\_.$$

5. 矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，则$x=$______，

$y=$______.

三、计算题（每小题6分，共30分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{2x} & x>0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. 设有 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，(其中 $f''(t)$ 存在)，

3、求不定积分 $\int\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)dx$.

4、设连续型随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x)=A+B\operatorname{arctg} x \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

求：(1) 常数 A 和 B，(2) ξ 落入 $(-1,1)$ 的概率，(3) ξ 的密度函数.

5. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程.

四.(每小题 6分，共 12分.)

1. 已知 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称阵 A 的三个特征值，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$，$\xi_3=(1,-2,1)^T$，求 A 对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 A.

2. 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+x_3^2$

为标准形.

五、(8分)

已知 $f(0)=1$, $f(\frac{1}{2})=e^{-1}$, $f''(x)$ 连续, 试求函数 $f(x)$, 使得曲线积分 $\int_A^B [f'(x)+6f(x)]y\,dx+f'(x)\,dy$ 与路径无关.

六、(8分)

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\,dy\,dz+x^2\,dz\,dx+(y+z^2)\,dx\,dy$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(0<z<1)$ 的外侧.

七、证明题 (每小题6分, 共12分.)

1. 证明: $e^x-e^{\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{1-e^{-x}}}=1$. $(x>0)$

2. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵, B 是一个 $n\times m$ 矩阵, $n<m$, 证明: 齐次线性方程组 $(AB)X=0$ 有非零解.