

四川大学

200 / 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学（微积分、级数）

科目代号：341#

适用专业：理论物理、凝聚态物理、光学
粒子物理与原子核物理

(试题共 2 页)

(请将试题附在考卷内交回)

注：请勿在试题上答题，否则后果自负。

一. 填空题 (本题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

- (1) 设 $\phi(x)$ 在 $x=a$ 点连续, 且 $f(x) = |x-a|\phi(x)$ 在 a 处可导, 则 $\phi(a) = (\quad)$ 。
 (2) 平面 $Ax + By + 6z = 2$ 与直线 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$ 垂直, 则 $A = (\quad)$; $B = (\quad)$ 。
 (3) 设幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n$, 则该幂级数的收敛区间为 (\quad) ; 收敛域为 (\quad) 。
 (4) 设 $\vec{A} = (2z - 3y)\vec{i} + (3x - z)\vec{j} + (y - 2x)\vec{k}$, 则 $\text{div } \vec{A} = (\quad)$; $\text{rot } \vec{A} = (\quad)$ 。

二. 单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 (\quad)
 (A) 无穷小 (B) 无穷大
 (C) 有界的, 但不是无穷小 (D) 无界的, 但不是无穷大。
- (2) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $a < x_1 < x_2 < b$, 则至少有一点 ξ , 使得下列等式成立的是 (\quad) 。
 (A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ $\xi \in (a, b)$ (B) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ $\xi \in (x_1, x_2)$
 (C) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ $\xi \in (a, b)$ (D) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ $\xi \in (x_2, x_1)$ 。
- (3) 设函数 $\Phi(x) = \int_0^{x^2} t e^{-t} dt$, 则 $\Phi'(x) = (\quad)$
 (A) $x e^{-x}$ (B) $-x e^{-x}$
 (C) $2x^3 e^{-x^2}$ (D) $-2x^3 e^{-x^2}$ 。
- (4) 设以下空间曲线积分与路径无关: $\int_C P dx + Q dy + R dz$, 其中 $P = xz + ay^2 + bz^2$, $Q = xy + az^2 + bx^2$, $R = yz + ax^2 + by^2$, 则 (\quad) 成立。
 (A) $a = b = \frac{1}{2}$ (B) $a = b = 0$
 (C) $a = 1, b = \frac{1}{2}$ (D) $a = \frac{1}{2}, b = 0$ 。

三. 计算下列各题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.

(2) 设 $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \arctan t$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

(3) $\int \sin \sqrt{x} dx$

(4) 设 $z = f(x, y)$ 满足 $e^{-xy} - 2z + e^x = 0$, 求全微分 dz .

(5) $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2}$, 其中 Ω 为柱面 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 及 $z = 0, z = a (a > 0), y = 0$ 平面所围成的区域.

(6) $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy$, 其中 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$.

四. 设有底为 6 米, 高为 2 米的等腰三角形闸板铅直倒置于水中 (设水比重为 1) 底与水面平齐, 求水对它的压力. (本题满分 7 分)

五. 求面密度为 $\mu = z$ 的抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) (0 \leq z \leq 1)$ 的质量. (本题满分 8 分)

六. 在半径为 R 的圆形广场中心挂一灯, 问要挂多高, 才能使广场周围的路上照得更亮? (灯光的亮度与光线投射角的余弦成正比, 与光源距的平方成反比, 而投射角是经过灯所作垂直于地面的直线与光线所夹的角) (本题满分 7 分)

七. 已知力场 $\vec{F} = (y, x)$, 问将单位质点从原点沿直线移到曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限那部分上, 终点为何点时力场 \vec{F} 做功最大, 并求此最大的功. (本题满分 10 分)

八. 将 $f(x) = 2 + |x|, (-1 < x < 1)$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和. (本题满分 10 分)