

四川大学

2001 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 数学

科目代号: 348#

适用专业: 计算机应用技术

(试题共 5 页)

(请将试题附在考卷内交回)

一. 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

$$1. \text{ 设 } \lambda \text{ 为实数, 函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^\lambda} \cos \frac{1}{x-1} & x \neq 1, \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 λ 必满足下列条件 ()

- (1) $-1 \leq \lambda < 0$ (2) $0 \leq \lambda < 1$ (3) $\lambda < -1$ (4) $\lambda \geq 1$

2. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 则 $f(x) = ()$.

- (1) $\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x + C$ (2) $x - \frac{1}{2} x^2 + C$
(3) $\cos x - \sin x + C$ (4) $\frac{1}{2} x^2 - x + C$

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = l \neq 0$, 且 $u_n \geq 0$, $n=1, 2, \dots$, 则下列

结论中正确的是 ()

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (l - n u_n)$ 收敛,
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 发散, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 为正定二次型的充要条件是参数 t 满足条件 ().

- (1) $-2 < t < 2$, (2) $t > 2$ 或 $t < -2$,
 (3) $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$, (4) $t < -\sqrt{2}$ 或 $t > \sqrt{2}$.

5. 设 ξ 和 η 是独立的随机变量. 若 $\xi \sim N(1, 4)$, $\eta \sim N(3, 16)$, 则下列各式中不成立的是 ()

- (1) $E(\xi + \eta) = 4$ (2) $E(\xi\eta) = 3$ (3) $D(\xi - \eta) = 12$
 (4) $D(\eta + 2) = 16$.

二. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $\varphi(x)$ 为连续函数, 又设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x \left\{ (t-1) \int_0^t \varphi(u) du \right\} dt}{x^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 微分方程 $(xy + x^3y)dy = (1+y^2)dx$ 的通解为

4. 设 A 为 n 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则当 $|A|=5$ 时, $|(5A^*)^{-1}| =$ _____.

5. 曲面 $z = 2x^2 + 4y^2$ 在点 $(2, 1, 12)$ 处的切平面方程是 _____.

三. 计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x^2} + \frac{\arcsin x^2}{x} \right\}$,

2. 设由方程组 $\begin{cases} x = 2t-1 \\ te^4 + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定了 y 是 x 的二阶可导函数, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

3. 求不定积分 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$,

4. 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 确定的有界闭区域, 求 $I = \iiint_{\Omega} e^{|z|} dx dy dz$.

5. 设随机变量 $\xi \sim N(5, 5)$, 而随机变量 $\eta \in [0, \pi]$ 上服从均匀分布, 若相关系数 $\rho_{\xi\eta} = \frac{1}{2}$, 求 $D(\xi - 2\eta)$ 和 $E(\xi - 2\eta)$.

四. 解答下列各题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设向量 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 求常数 a 及 A^{-1} 的全部特征向量.

2. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2\lambda x_2x_3 + 3x_3^2$ ($\lambda > 0$) 经过变换后化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求常数 λ 及所用的正交变换.

五. (8 分) 已知 $\varphi(x)$ 使积分 $\int_A^B \left\{ \frac{e^x}{x} - \varphi(x) \right\} y dx + x\varphi(x) dy$ 与路径无关, 且 $\varphi(1) = e$, 求函数 $\varphi(x)$, 并在 A, B 分别为点 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 时求出该积分值.

六. 设 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的外侧, 计算积分
$$I = \iint_{\Sigma} x^3 y dx dy dz + x y^3 dz dx + z^2 dx dy \quad (3 \text{ 分})$$

七. 证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 有 n 个不同的特征值, 若 A 的特征向量都是 B 的特征向量, 证明 $AB = BA$.

2. 证明: 曲线 $x = ae^{t} \cos t, y = ae^{t} \sin t, z = ae^{t}$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.