四川大学

2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数分、高代基础
科目代码：346#
适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论

（试题共 2 页）

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上不给分）

一、(每小题 10 分，共 20 分)设 $lim_{n\to\infty}x_n = a$, 设

$$y_n = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n}{n(n+1)},$$

证明：

1. 若 a 为有限数，则 $lim_{n\to\infty}y_n = \frac{a}{2}$;

2. 若 $a = +\infty$, 则 $lim_{n\to\infty}y_n = +\infty$.

二、(每小题 10 分，共 20 分)设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减且 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

1. 证明： $lim_{x\to+\infty}xf(x) = 0$;

2. 若 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to 0$ 且 $f'(x)$ 连续，证明 $\int_1^{+\infty} xf'(x)dx$ 也收敛.

三、(每小题 10 分，共 20 分) 1. 设对每个正整数 n, $u_n(x)$ 是 $(0, 1)$ 内的单调递减连续函数，且 $lim_{x\to 1-0}u_n(x) = 1$, 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则

$$lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

2. 证明：

$$lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)} = \frac{1}{2}ln2.$$

四、(本题满分 15 分)设 $y = f(x)$ 在 $[-\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \sqrt{a^2+b^2+c^2}]$ 上连续，证明：

$$\int\int_S f(ax + by + cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u,$$

其中 S 为单位球面： $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

五、(本题满分 20 分) 1. 设 $f(x)$ 为首一的 n 次多项式, 对任意的数 a, 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} f(a) & f'(a) & f''(a) & \dots & f^{(n)}(a) \\ f'(a) & f''(a) & f'''(a) & \dots & f^{(n+1)}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(n)}(a) & f^{(n+1)}(a) & f^{(n+2)}(a) & \dots & f^{(2n)}(a) \end{vmatrix}$$

2. 把对称多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4$ 表示成初等对称多项式的多项式.

六、(本题满分 15 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, A 的秩为 $\mathrm{r}(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹, 即 A 的主对角元素之和.

1. 求证: $\mathrm{r}(A) \leq 1$ 的充分必要条件是 A 是如下形式的方阵:

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

2. 设 $\mathrm{r}(A) = 1$. 求证: $A^2 = 0$ 的充分必要条件是: $\mathrm{tr}(A) = 0$.

七、(本题满分 20 分) 设 k 为自然数,

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\pi}{2k} \\ -\frac{\pi}{2k} & 1 \end{pmatrix}.$$

在复数域 $\mathbf{C}$ 上求 A_k 的特征值、特征向量, 并计算 $\lim_{k\to\infty}(A_k)^k$.

八、(本题满分 20 分) 设

$$\alpha_1 = (2,4,2,0),\ \alpha_2 = (1,-1,-1,-1),\ \alpha_3 = (0,-3,-2,-1),$$

$$\beta_1 = (-2,1,0,-1),\ \beta_2 = (-1,1,1,-3,-7).$$

设 V_1 和 V_2 分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 在 $\mathbf{R}^4$ 中生成的子空间. 求:

1. $V_1 + V_2$ 的维数和它的基;
2. $V_1 \cap V_2$ 的维数和它的基.