四川大學

2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：计算方法及程序设计
科目代码：442#
适用专业：计算数学

（试题共 3 页）
（答案必须写在答卷纸上，写在试题上不给分）

1. 设 $y=\sqrt{x}$，取节点 $x_0=100$，$x_1=121$，$x_2=144$，建立二次插值多项式计算 $\sqrt{115}$，并给出截断误差。（本题10分）

2. 试确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽可能高：

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h).$$

（本题10分）

3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称正定阵，经高斯消去法一步后，A约化为如下形式：（本题25分）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1^T=(a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n})$，$A_2=(a_{ij}^{(2)})_{(n-1)\times(n-1)}$。

试证明：

① A的对角元素 $a_{ii}>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$；

1

② A_2对称正定； ③ $a_{ii}^{(2)} \le a_{ii}$ $(i=2,3,\cdots,n)$.

4. 若 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ 有n个互异零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 证明

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 当\ 0 \le k \le n-2 \\ \frac{1}{a_0}, & 当\ k=n-1 \end{cases}$$

(本题20分)

5. 用LU分解解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$ (本题10分)

6. 已知数据

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	1	0

，试用最小二乘原理作线性多项式拟合这组数据. (本题10分)

7. 对线性方程组 $AX=b$， $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，试判别用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代求解的敛散性.
(本题20分)

8. 证明对 $\forall t$，下列龙格-库塔公式为二阶的：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_2+k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n+th, y_n+thk_1) \\ k_3 = f(x_n+(1-t)h, y_n+(1-t)hk_1) \end{cases}$$

(本题20分)

9. 牛顿迭代法求 $\sqrt{c}\ (c>0)$ 的迭代格式为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{c}{x_k}\right).$$

①试证明对任意初值 $x_0>0$，该迭代都收敛；

②给出相应算法及C语言程序．

(本题25分)