# 四川大學

## 2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

43

考试科目：高等数学（环境科学专业）
科目代码：314#
适用专业：环境科学

（试题共 3 页）

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上不给分）

一．填空题（每小题4分，共20分）

1．设 $f(x)=e^{x-1}+(x-1)\arctan x$，则 $f'(1)=$ ______．

2．曲线 $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 对应的点处的切线方程为 ______．

3．若 $\dfrac{\ln x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x f'(x)dx=$ ______．

4．$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx=$ ______．

5．设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}=-1$，则 $f'(x_0)=$ ______．

二．选择题（每小题4分，共20分）

1．当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小中，哪一个是比其它三个更高阶的无穷小（　　）．

(A) $x^2$；　(B) $1-\cos x$；　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$；　(D) $x-\tan x$．

2. $y=x|x(x-2)|$的不可导的点为（　　）.

(A) $x=0, x=2$；(B) $x=2$；(C) $x=0$；(D) 不存在.

3. $x=0$是$f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$的（　　）间断点.

(A) 跳跃；(B) 可去；(C) 无穷；(D) 振荡.

4. 设函数$f(x)$在$[0,1]$二阶可导,且$f''(x)>0$, 则$f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序是（　　）.

(A) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；(B) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

5. 设函数$f(x)$在$[-a,a]$上连续, 则$\int_{-a}^{a}f(x)dx$恒等于（　　）.

(A) $2\int_0^a f(x)dx$；(B) $0$；

(C) $\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$；(D) $\int_0^a[f(x)-f(-x)]dx$.

三.(9分) 设当$x\to 0$时, $e^x-(ax^2+bx+1)$是比$x^2$高阶的无穷小, 求$a$、$b$之值.

四.(9分) 设$y=f(\ln x)e^{f(x)}$, 其中$f$可微, 求$dy$.

五.(9分) 求由方程$\ln\dfrac{x^2}{y}-xy^2=1$确定的函数$y=y(x)$的导数$y'$.

六.(9分) 计算$\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

七.(10分) 设$F(x)=\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt$, 求$\int_{-2}^{3}x^2F'(x)dx$.

八.（10分）过点 $M(3,1)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求由切线、抛物线及 $x$ 轴所围成的平面图形的面积.

九.（10分）设 $f(x)=\int_0^x (t^2-xt)e^{-t}dt$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

十.（10分）将长为 $a$ 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形，问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

十一.（10分） 求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

十二.（12分）设 $L$ 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 $y$ 轴上的截距，且 $L$ 经过点 $(\frac{1}{2},0)$，求曲线 $L$ 的方程.

十三.（12分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1$，试证：

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意实数 $\lambda$，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.