四川大学

2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学
科目代码：3138
适用专业：计算机系统结构、计算机软件与理论
计算机应用技术
（试题共4页）
（答案必须写在答卷纸上，写在试题上不给分）

一．填空题（每小题5分，共25分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{x}=$ ___1___.

2. 设 $\int f(x)dx=\sin x^2+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$ ___ $-\sin e^{-2x}+C$

3. 设函数 $y=y(x)$ 的图像上点 $(0,-1)$ 的切线为 $2x-y-1=0$，且 $y(x)$ 满足 $y''=6x$，则此函数为 ___ $y=x^3+2x-1$ ___.

4. 若矩阵A既是对称矩阵，又是反对称矩阵，则A一定是 ___0___ 矩阵．

$A^T=A$ ... $A^T=-A$

5. 设随机变量ξ的密度函数为 $P(x)=\begin{cases} C\sin x, & x\in[0,\pi] \\ 0, & \text{其它的}x \end{cases}$，则常数 $C=$ ___ $\frac{1}{2}$ ___.

二．选择题（每小题5分，共25分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ C ）

(A) 无极限 (B) 不连续 (C) 连续但不可导

(D) 可导

2. 设有 $y = x - \frac{1}{2}\sin x$，则 $\frac{dx}{dy} = $ (D)

(A) $1-\frac{1}{2}\cos y$ (B) $1-\frac{1}{2}\cos x$

(C) $\frac{2}{2-2\cos y}$ (D) $\frac{2}{2-\cos x}$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域是 (D)

(A) $(-3, 3]$ (B) $[-3, 3]$

(C) $(-3, 3)$ (D) $[0, 6)$

4. 函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的二个偏导数存在是 $f(x, y)$ 在 M_0 可微的 (B) 条件.

(A) 充分而不必要 (B) 必要但不充分

(C) 充分必要 (D) 既不充分也不必要

5. 设 A 是 n 阶方阵，k 是常数；若 $|A| = a$，则 $|kAA^T| = $ (D) (A^T 是 A 的转置矩阵)

(A) ka^2 (B) $k^2 a$

(C) $k^2 a^2$ (D) $k^n a^2$

三、计算与应用题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 求极限 $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (e^t + e^{-t} - 2)\,dt}{1-\cos x} = 0$

(A) 无极限　　(B) 不连续　　(C) 连续但不可导

(D) 可导

2. 设有 $y=x-\frac{1}{2}\sin y$，则 $\frac{dx}{dy}=$ (D)

(A) $1-\frac{1}{2}\cos y$　　(B) $1-\frac{1}{2}\cos x$

(C) $\frac{2}{2-2\cos y}$　　(D) $\frac{2}{2-\cos x}$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域是 (D)

(A) $(-3,3]$　　(B) $[-3,3]$

(C) $(-3,3)$　　(D) $[0,6)$

4. 函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的二个偏导数存在是 $f(x,y)$ 在 M_0 可微的 (B) 条件.

(A) 充分而不必要　　(B) 必要但不充分

(C) 充分必要　　(D) 既不充分也不必要

5. 设A是n阶方阵，k是常数；若 $|A|=a$，则 $|kAA^T|$ = (D) (A^T 是A的转置矩阵)

(A) ka^2　　(B) k^2a

(C) k^2a^2　　(D) k^na^2

三、计算与应用题（每小题10分，共80分）

1. 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x(e^t+e^{-t}-2)dt}{1-\cos x}=0$

2. 设 $z=f(u)$ 且 $u=u(x,y)$ 满足方程 $u=y+x\varphi(u)$，其中 f、φ 可导，试证：$\frac{\partial z}{\partial x}-\varphi(u)\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. 求曲面 $z=2x^2+\frac{1}{2}y^2$ 上平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的切平面方程，并写出切点处的法线方程.

4. 计算半径为1，密度函数 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$ 的球体质量.

5. 表达式 $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$ 是否为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，如果是则求出此函数.

6. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz+8xy\,dzdx-4xz\,dxdy$，其中 Σ 是曲线 $x=e^y\ (0\le y\le a)$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面的外侧.

7. 当 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda\end{cases}$

① 无解. ② 有唯一解 ③ 有无穷多解？且在有无穷多解时，求出其全部解.

8. 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，又设 $B=3A^{-1}$，求 (1) B 的特征值；(2) 与 B 相似的对角阵；(3) 行列式 $|B|$；

四、证明题（每小题10分，共20分）

1. 证明：$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} e^y f(x)\,dx = \int_0^1 (e-e^{x^2}) f(x)\,dx$

2. 设A、B均为正定矩阵，证明A+B也为正定矩阵

答案

一. 填空题

1. 1 ， 2. $-\sin(e^{-x^2})+C$， 3. x^2+2x-1，

4. 零 ， 5. $\frac{1}{2}$

二. 选择题

1. (C)， 2. (D) 3. (D) 4. (B)，

5. (D)

三. 计算与应用题

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\cos x}=0$。

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，由 $u=y+x\varphi(u)$ 知 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$，而 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{1-x\varphi'(u)}$，所以

$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\varphi(u)\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)}-f'(u)\dfrac{\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)}=0$

3. $\vec{n}=\{4x, y, -1\}=\lambda\{-4, 2, 2\}\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$。

切点为 $(\frac{1}{2},-1,1)$，$\vec{n}=\{2,-1,-1\}$

切平面方程为 $2x-y-z-1=0$.

4. $m=\iiint\limits_{\Omega}\varphi(x,y,z)\,dv=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\cdot$

$r^2\sin\varphi\,dr=\frac{8}{15}\pi.$

5. $\because \frac{\partial P}{\partial y}=xe^y-ye^y+e^y+1=\frac{\partial Q}{\partial x}$. ∴表达式为某个 $u(x,y)$

的全微分. $u(x,y)=(x-y+1)e^{x+y}+ye^x+C$.

6. 补上块平面后 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(1-x^2)\,dydz+8xy\,dzdx-4xz\,dxdy$

$=\iiint\limits_{\Omega}0\,dv=0,$

∴原式 $=-\iint\limits_{\Sigma_1}2(1-x^2)\,dydz+8xy\,dzdx-4xz\,dxdy$

$=-\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2}2(1-e^{2a})\,dydz=2(e^{2a}-1)\pi a^2.$

7. $\bar{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$