

四川大学

2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学 (微积分、函数、线性代数)

科目代码: 3714

适用专业: 光学

(试题共 3 页)

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上不给分)

一. 选择题 (每小题 5 分, 共 25 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

(A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续 (C) 连续但不可导
(D) 可导.

2. 设 $f(x)$ 的导函数是 $e^{-x} + \cos x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()

(A) $-e^{-x} + \sin x$ (B) $e^{-x} - \cos x$ (C) $-e^{-x} - \cos x$ (D) $e^{-x} + \sin x$

3. 若直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x = -1+t, y = 1+t, z = t$ 相交, 则 $\lambda =$ ()

(A) $-\frac{5}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

4. 设 A 是一个 3 阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 A 的列向量组, 已知线性齐次方程组 $AZ = 0$ 有非零解, 则下列结论中 () 是正确的.

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 (B) α_1 可以由 α_2, α_3 线性表示

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中含有零向量 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

5. 当满足 () 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(U_n)$ ($U_n > 0$) 收敛.

(A) $U_{n+1} \leq U_n$ ($n=1, 2, \dots$), (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$,

(C) $U_n > \frac{1}{n}$, ($n=1, 2, \dots$) (D) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛.

二. 填空题 (每小题 5 分, 共 25 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{\lambda x} = \int_{-\infty}^{\lambda} t e^t dt$, 则 $\lambda =$ _____.

2. 已知点 $P(1, 3, -4)$ 和平面 $\pi: 3x + y - 2z = 0$, 则 P 关于 π 的对称点是 _____.

3. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

4. 曲线 $y = \frac{x|x|}{(x-1)(x+2)}$ 共有 () 条渐近线.

5. 设 $z = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 是 3 阶函数, 则 $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ _____.

三. 计算题 (每小题 10 分, 共 80 分)

1. 设 $f(x)$ 连续, $f(0)=1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} x f(t) dt}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.

2. 设 $z = f(u, v)$, f 有二阶连续偏导数, $u = xy, v = e^x$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 与 $x^2 + y^2 = z$ 所围.

4. 已知 $f(0)=1$, 求 $f(x)$ 使曲线积分

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left[\lg x - f(x) \right] \frac{y}{\cos^2 x} dx + f(x) dy$$

与路径无关, 并求积分值.

5. 计算 $I = \iiint_{\Sigma} (cdydz + y dz dx + (z^2 + \frac{2}{3}a) dx dy)$ 其中 Σ 是锥面 $x^2 + y^2 = (a-z)^2$, $0 < z \leq a$ 的外侧.

6. 设 $-2, 3, 5$ 是三阶矩阵 A 的特征值, 计算矩阵 $A^3 - 2A^2 + 6A - 3E$ 的行列式 (E 是三阶单位矩阵)

7. 方程组
$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

在什么条件下无解? 在什么条件下有解? 有解时, 求出其全部解.

8. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径, 收敛域及其在收敛区间内的和函数.

四. 证明题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. 设 $\pi > 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \pi}}$ 绝对收敛.

2. 设 P 是可逆矩阵, A 是对称矩阵, 证明: 若 A 正定, 则 $P^T A P$ 也正定.