

四川大學

58

2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学 (微积分、常微分方程、级数)

科目代码: 312#

适用专业: 原子与分子物理

(试题共 2 页)

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上不给分)

一、求解下列各题 (70 分, 每小题 7 分):

1. $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + x^{\sin x}$, 求导数 y'

2. 设 $y=y(x)$ 是方程 $x^y - y^x = 0$ 所确定的函数, 求导数 y'

3. 求不定积分 $\int e^{2x} (1 + \tan x)^2 dx$

4. 求定积分 $\int_0^{\pi} \ln(1 + \tan x) dx$

5. 设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\int \varphi(x) dx$

6. 设 $y = \arccot x$, 求 $y^{(n)}(0)$

7. 求广义积分 $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$

8. 讨论积分 $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ 的收敛性

9. 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, f 具有二阶偏导数, 求

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

10. 求二重积分 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^x dx$

二、(10 分) 求由曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (x > 0, y > 0)$

所围成的平板关于 y 轴的转动惯量。

三、(10 分) 求微分方程 $y'' + y = \cos^2 x$ 在原点处与直线 $y = 2x$ 相切的特解

四、(10 分) 求微分方程 $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$ 的通解

五、(11 分) 求函数 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ 的极值

六、(12 分) 证明 $(2x + \sin y)dx + x \cos y dy$ 是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求出 $u(x, y)$

七、(12 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ 展开为 $x = 1$ 的泰勒

级数, 并指出收敛域

八、(15 分) 将函数 $f(x) = \begin{cases} x, & (-1 \leq x < 0) \\ x+1, & (0 < x \leq 1) \end{cases}$

(1) 画出函数 $f(x)$ 的图形;

(2) 求 $f(x)$ 的富里埃级数;

(3) 画出富里埃级数的和函数的图形;

(4) 说明函数 $f(x)$ 在哪些点上能够展开为富里埃级数