四川大學

2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析、高等代数

科目代码：366#

适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、信息安全、运筹与物流管理、概率论与数理统计、运筹学与控制论、金融数学与计量经济学

（试题共 2 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、（本题满分 20 分）设 $a_1>0$，$a_2>0,\cdots,a_n>0$，定义

$$f(x)=\left(\frac{a_1^{\ x}+a_2^{\ x}+\cdots+a_n^{\ x}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

证明：(1) $\lim_{x\to 0} f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

(2) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

二、（本题满分 20 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，且满足：$f(0)=0$，$0<f'(x)\le 1$.

(1) 证明：$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$.

(2) 举一个满足条件且使 (1) 中等号成立的例子.

三、（本题满分 20 分）设 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a,b) 中的任意一点处可导，且 $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)$. 分别就以下三种情形：(1) a,b 有限；(2) $a=-\infty, b=+\infty$；(3) a 有限、$b=+\infty$ 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

四、（本题满分 20 分）计算：$\iint_S\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)$

其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$的外侧.

五、（本题满分 15 分）设 F 是数域，A 是 F 上的一个元素全为 a 的 n 阶方阵.

1. 求 A 的特征多项式. (5 分)
2. A 在 F 上是否相似于一个对角阵？说明理由. (10 分)

六、（本题满分 15 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.

1. 证明 A 是可逆的. (5 分)
2. 把 A^{-1} 表示为 A 的实系数多项式. (10 分)

七、（本题满分 15 分）设 $M_{2\times2}(F)$ 是数域 F 上的 2 阶方阵的全体. 给定 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(F)$，定义映射：$T:M_{2\times2}(F)\to M_{2\times2}(F)$ 为：$X\mapsto T(X)=AXB$.

1. 证明：T 是 $M_{2\times2}(F)$ 上的线性变换. (5 分)
2. 分别求 T 的核与像的维数. (10 分)

八、（本题满分 15 分）

1. 设多项式 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-(2n+1))+1$，其中 n 为非负整数. 证明：$f(x)$ 在有理数域上一定不可约. (8 分)
2. 在有理数域上求多项式 $g(x)=x^4+2x^3-11x^2-12x+36$ 的标准分解式. (7 分)

九、（本题满分 10 分）设 A, B 是实数域上的 n 阶方阵且 $AB+BA=0$. 证明：如果 A 是对称矩阵且半正定，则有 $AB=BA=0$.