

四川大学

2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 近世代数
科目代码: 458#
适用专业: 信息安全

(试题共 2 页)

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上不给分)

一. 填空 (共 60 分).

1. 在同构意义下有 个 4 阶群, 个 6 阶群和 个 19 阶群.
2. 在同构意义下有 个 18 阶 Abel 群.
3. 设 a, b 是 Abel 群 G 中的元素. a 的阶是 6, b 的阶是 4, 则 ab 的阶是 , a^4 的阶是 .
4. 用 F_2 表 2 个元的有限域. F_2 有 个子域.
5. 设 E/F 是域扩张, $[E:F]=7$, 则 E/F 有 个 (含平凡的) 中间域.
6. 在同构意义下, 环 $\mathbb{Z}/(24)$ 有 个同态像, 其中 个是整环 (\mathbb{Z} 表整数环).
7. 含有 8 个元且无零因子的环 (在同构意义下) 有 个.

8. 设 $\mathbb{Z}[i]$ 表高斯整数环, 那么商环 $\mathbb{Z}[i]/(3+i)$ 有一个元素.

二. 写出 S_3 的全部子群, 并指出哪些是正规的. (本题 15 分)

三. 证明阶为 p^2 (p 为素数) 的群为交换群. (15 分)

四. (15 分). 设 R 是带 1 的交换环, A_1, \dots, A_n 为 R 的理想, 且对 $1 \leq i \leq j \leq n$, 有 $A_i + A_j = R$, 证明

$$R/A_1 \cap \dots \cap A_n \cong R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$$

五. (15 分). 证明: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是 Euclid 环.

六. (15 分). 设 R 是带 1 的交换环, M 是一极大理想, 证明 M^n/M^{n+1} ($n \geq 1$) 可自然定义为域 R/M 上的线性空间. 若 R 是整数环 \mathbb{Z} 上的 n 元多项式环 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, M 是由素数 p 和 x_1, \dots, x_n 生成的理想, 请计算空间 M^n/M^{n+1} 的维数.

七. 求域扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ 的 Galois 群和中间域. (15 分)