四川大学

2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：　概率统计
科目代码：　456#
适用专业：　概率论与数理统计

（试题共 2 页）
（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、（18 分）玻璃杯成箱出售，每箱 20 只。假设各箱含有 0，1，2 只残次品的概率相应为 0.8，0.1，和 0.1。一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随机取一箱，而顾客随机地察看 4 只（无放回抽取）：若没有残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

1. 顾客买下该箱的概率；
2. 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率。

二、（18 分）设随机变量 ξ 在区间 $[-1,3]$ 上服从均匀分布，记

$$\eta = \begin{cases} -1, & 若\ \xi < 0 \\ 0, & 若\ \xi = 0 \\ 1, & 若\ \xi > 0 \end{cases}$$

1. 求 η 的分布律；
2. 记 $\zeta = \eta + 1$，写出 ζ 的分布函数.

三、（22 分）设随机向量 (ξ, η) 的联合密度函数为：

$$p(x,y) = \begin{cases} 3y, & 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

1. 求条件密度函数 $p(x|y)$；
2. 求条件概率 $P(\xi \le \frac{1}{4}|\eta = \frac{1}{2})$；
3. 问：ξ 与 η 是否相互独立？

四、（18 分）设 $f(x)(0 \le x < \infty)$ 是单调非降函数，且 $f(x) > 0$. 对随机变量 ξ，若 $Ef(|\xi|) < \infty$，试证明：对任意 $x > 0$，有 $P\{|\xi| \ge x\} \le \frac{1}{f(x)} Ef(|\xi|)$.

五、（18 分）设 ξ, η 是独立同分布的随机变量，都服从 $[0,1]$ 上均匀分布. 记 $U = \xi + \eta$，试求 U 的密度函数.

六、（20 分）设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的普阿松分布，记

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - E\xi_k)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}}$$

1. 求 η_n 的特征函数；

2. 试用特征函数的方法求 η_n 的极限分布.

七、(18 分) 设测量的随机误差服从正态分布 $N(0,10^2)$.

1. 求测量的随机误差绝对值大于 19.6 的概率;
2. 试利用中心极限定理计算在 1000 次独立重复测量中，至少有 44 次测量的随机误差的绝对值大于 19.6 的概率.

附：标准正态分布表

x	0.80	0.84	0.86	0.87	1.64	1.96
$\Phi(x)$	0.7881	0.7995	0.8051	0.8078	0.9495	0.975

八、(18 分) 设总体 X 的密度函数为:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\theta\pi x}}e^{-\frac{x}{2\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本,

1. 求 θ 的极大似然估计量;
2. 证明此估计量是 θ 的无偏估计量.