四川大學

35

2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学（环境科学专用）
科目代码：319#
适用专业：环境科学

（试题共 4 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、填空题（每小题4分，共24分）

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ a+bx, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$ ____，$b=$ ____。

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx=$ ____。

(3) 曲线 $y=x^3+ax$ 与 $y=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$，且在点 $(-1,0)$ 处有相同的切线，则 $a=$ ____，$b=$ ____，$c=$ ____。

(4) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} x\sin t^2 dt=$ ____。

(5) 设 $\cos(3x+2y+z)=3x+2y+z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ ____。

(6) 微分方程 $x^3yy'=1-xyy'+y^2$ 的通解为 ____。

二、选择题（每小题4分，共32分）

(7) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a<x_1<x_2<b$，则至少存在一个 ξ，使下列等式中（　　）成立。

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,x_1)$；

(B) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(x_2,b)$；

(C) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, $\xi\in(x_1,x_2)$;

(D) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$, $\xi\in(a,b)$.

(8) 设$y=f(x)$是微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$的解，且$f'(x_0)=0$，则以下断言正确的是（　　）。

(A) $f(x)$在x_0的某邻域内单调增加；(B) $f(x)$在x_0的某邻域内单调减少；

(C) $f(x)$在x_0处取极小值；　　(D) $f(x)$在x_0处取极大值。

(9) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有（　　）。

(A) 1条　　(B) 2条　　(C) 3条　　(D) 4条。

(10) 当$x\to 0$时，$\int_0^x (t-\sin t)dt$是$\frac{1}{2}x^3$的（　　）。

(A) 高阶无穷小；　　(B) 低阶无穷小；

(C) 同阶无穷小但不等价；　　(D) 等价无穷小。

(11) 设函数$p(x)$, $q(x)$, $f(x)$在区间(a,b)上连续，$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的3个线性无关的解，C_1, C_2为2个任意常数，则该方程的通解是（　　）。

(A) $(C_1+C_2)y_1+(C_2-C_1)y_2+(1-C_2)y_3$; (B) $(C_1+C_2)y_1+(C_2-C_1)y_2+(C_1-C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1+(C_2-C_1)y_2+(1-C_2)y_3$; (D) $C_1y_1+(C_2-C_1)y_2+(C_1-C_2)y_3$.

(12) 设 $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, $h(x)=x^2$, 则 $\frac{d}{dx}f[h(x)]=$（　　）。

(A) $g(x^2)$;　(B) $2xg(x)$;　(C) $x^2g(x^2)$;　(D) $2xg(x^2)$.

(13) 设 $I_1=\int_0^a x^3f(x^2)dx$, $I_2=\int_0^{a^2}xf(x)dx$ $(a>0)$, $f(x)$为连续函数，则以下结论中正确的是（　　）。

(A) $2I_1=I_2$;　(B) $I_1<I_2$;　(C) $I_1>I_2$;　(D) $I_1=I_2$.

(14) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$ 可写成（　　）.

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$;　　(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$;　　(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

三、解答题（本题共9个小题，满分94分）

(15)（9分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}}$.

(16)（9分）求曲线 $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ 所围成的平面图形的面积 S.

(17)（9分）设 $z=\cos(xy)+f\left(x,\frac{y}{x}\right)$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18)（9分）计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\,dx$.

(19)（10分）设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx,$$

求 $f(x)$.

(20)（12分）设有连结 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线段 $\widehat{OA}$，对于 $\widehat{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\widehat{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 围成的图形面积为 $\frac{x^3}{3}$，求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程.

图形

偏导

成段

成的

(21)(12分) 设 $y=y(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的二次可微函数,且满足方程

$$y'(x)-a^2\int_0^x y(t)\,dt=2e^{ax}$$

及条件 $y(0)=0$,求 $y(x)$.

(22)(12分) 已知平面上两点 $A(1,3)$,$B(4,2)$ 及在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,$x\geq 0$,$y\geq 0$ 的弧段上任意一点 C,求三角形 ABC 面积的最大值.

(23)(12分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,试证存在 $\xi\in(0,1)$ 使

$$\int_0^{\xi} f(t)\,dt=(1-\xi)f(\xi);$$

若再设 $f(x)>0$ 且单调减少,证明这个 ξ 是唯一的.

319#