四川大學

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：常微分方程

科目代码：431

适用专业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、不确定性处理的数学、信息安全

（试题共 2 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

1、（40分）考虑 Cauchy 问题 $d\mathbf{x}/dt=A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$，其中 A 是 n×n 实矩阵、$t\in\mathbf{R}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$。请选择填空：

（1）该问题解的存在唯一性条件是：__________。

(a) A(t)对 $t\in\mathbf{R}$ 连续，(b) A(t)对 $t\in\mathbf{R}$ 可微, (c) A(t)对 $t\in\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的，(d)A(t)对 $t\in\mathbf{R}$ 连续且 Lipschitz，(e) A(t)对一切 $t\in\mathbf{R}$ 可逆。

（2）设 X(t)是其基本解矩阵，则该问题的解为__________。

(a) $\mathbf{x}(t)=X(t-t_0)\mathbf{x}_0$,　(b) $\mathbf{x}(t)=\exp(A(t))\exp(-A(t_0))\mathbf{x}_0$,

(c) $\mathbf{x}(t)=X(t)X^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$,　(d) $\mathbf{x}(t)=\exp(A(t-t_0))\mathbf{x}_0$。

（3）以下 det X((t)表示 X(t)的行列式，正确的结果是__________。

(a) $\det X(t)\equiv\det X(t_0)$,

(b) 由 det X((t)=0 知道 $\det X(t_0)=0$，但反之未必，

(c) 由 $\det X(t_0)\neq0$ 知道对一切 t 都有 det X((t) ≠0,

(d) det X((t)=0 当且仅当 $\det X(t_0)=0$。

（4）若 C 是 n×n 实矩阵，X((t)C 也是基本解矩阵的条件是________。

(a) C 非零，(b) C 可逆，(c) C 可对角化，(d) C 对称。

2、（30分）假设 Cauchy 问题 $dx/dt=ax+f(t)$, $x(t_0)=x_0$ 满足解的存在唯一性条件，其中 a 为实数，$t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$。(1) 写出这个 Cauchy 问题解的表达式。(2)用常数变易法证明这个表达式。(3) 如果 $a>0$ 而且 f(t)连续有界，证明存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 使该 Cauchy 问题存在对所有 $t\in[t_0,+\infty]$都有界的解。

3、（30分）求通解：

(1) $(xy^2+4x^2y)+(3x^2y+4x^3)dy/dx=0$。

(2) $dy/dx=x^3y^3-xy$。

4、（30分）计算方程 $d^2x/dt^2+w^2x=0$ 的通解，其中 w 是正实数。进而计算方程 $d^2x/dt^2+w^2x=\cos t$ 关于初值 $x(0)=1$, $dx/dt(0)=0$ 的解。

5、（20 分）线性微分系统 $d\mathbf{x}/dt=A(t)\mathbf{x}$ 中 $A(t)$ 是 $n\times n$ 的实矩阵且关于 t 是以 w 为周期的连续函数，其中 $t\in\mathbf{R}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$。设 $X(t)$ 是其基本解矩阵，证明：

（1）$X(t+w)$ 也是该线性微分系统的一个基本解矩阵；

（2）存在可逆矩阵 B 使得 $X(t+w)=X(t)B$ 。