378-2

74

四川大學

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学（环境科学专用）
科目代码：319#
适用专业：环境科学

（试题共 4 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一. 填空题（每小题4分，共24分）

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，$F(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt$ 是 x^n 的同阶无穷小，则 $n=$ ______.

(2) 曲线 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 在 $t=0$ 对应点处切线的直角坐标方程是 $y=-\frac{3}{2}x$ ______.

(3) 函数 $y=\dfrac{e^x}{3+x}$ 的单增区间是 $(-3,+\infty)$ ______.

(4) 把极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$ 表示成定积分后得到的表达式是 ______.

(5) 交换二次积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx=$ $\int_1^2 dx\int_{1-x}^{0}f(x,y)dy$ ______.

(6) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 所确定，则 $dz|_{(0,0)}=$ ______.

二. 单项选择题（每小题4分，共32分）

(7) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$，则 $f''(2)=$(A).

(A) $\frac{7}{4}$.　(B) $-\frac{7}{4}$.　(C) $\frac{7}{8}$.　(D) $\frac{9}{4}$.

(8) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 的值是(B).

(A) $-\ln 2$.　(B) $\ln 2$.　(C) $\frac{1}{2}\ln 2$.　(D) $\ln 3$.

(9) 下列命题成立的是(D).

(A) 若 $f(x)$ 有唯一的驻点 x_0，则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点。

(B) 若 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

(C) 若 $f(x)$ 在某区间单调增加，则 $f'(x)$ 也单调增加.

(D) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续且有唯一的极值点，则当 $x=x_0$ 是极小(大)值点时，$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 的最小(大)值.

(10) 设 $I_1=\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{4}d\sigma$，$I_2=\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}}\,d\sigma$，$I_3=\displaystyle\iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$，则有(D).

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_2<I_3<I_1$.　(C) $I_1<I_3<I_2$.　(D) $I_3<I_2<I_1$.

(11) 累次积分 $\displaystyle\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$ 可以写成(C).

(A) $\displaystyle\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$.　(B) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$.

(C) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$.　(D) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$.

(12) 设 $\ln f(x)=\sin x$，则 $\int \frac{xf'(x)}{f(x)}dx=$ (B).

(A) $x\cos x+\sin x+C$. (B) $x\sin x+\cos x+C$.

(C) $x(\cos x+\sin x)+C$. (D) $x\sin x+C$.

(13) 设 $y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，且在任意 $x\in(0,+\infty)$ 处的增量 Δy 满足 $\Delta y(1+\Delta y)=\frac{y\Delta x}{1+x}+\alpha$，其中 α 当 $\Delta x\to 0$ 时是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=1$，则 $y(x)=$ (B).

(A) $\ln(1+x)+1$. (B) $(1+x)[\ln(1+x)+1]$.

(C) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+1+x\right)$. (D) $1+x$.

(14) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ (C).

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) 1.

三. 解答题（本题共9小题，满分94分）

(15)（10分）设 $x\geq 0$，$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 求 $\int_0^x f(x-t)\,dt$.

(16)（10分）设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$，其中函数 $f(s,t)$ 有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$.

(17)（9分）作变换 $t=\tan x$，把方程

$$\cos^4 x\frac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\frac{dy}{dx}+y=0$$

变换成 y 关于 t 的微分方程，并求原方程的通解.

+C.

处的增量 Δy 满足

Δx 的高阶无穷小.

+1].

0处连续, 则

1.

$\int_0^x f(x-t)\,dt$.

连续的二阶

0

(18)(9分) 设 $1\le a<b\le e$, 求证函数 $f(x)=x\ln^2 x$ 满足不等式

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0.$$

(19)(11分) 计算 $I=\iint_D y^2\,dx\,dy$, 其中 D 由直线 $x=-2$, $y=2$, x 轴及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

(20)(12分) 设 $f(x,y)=xy(6-2x-y)$, 闭区域 D 由 x 轴, y 轴与直线 $2x+y=8$ 围成, 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

(21)(11分) 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 的连续性与可导性.

(22)(11分) 设函数 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x)-3f(x)=-6x^2$, 且由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小, 求 $f(x)$.

(23)(11分) 位于上半平面的(向上)凹的曲线 $y=y(x)$ 通过点 $(0,2)$, 在该点处曲线的切线水平, 又曲线上任一点 (x,y) 处的曲率与 $\sqrt{y}$ 及 $1+y'^2$ 的乘积成反比, 比例系数为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 求该曲线的方程 $y=y(x)$.