四川大学

14

2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学（微积分、线性代数）
科目代码：360
适用专业：光学、无线电物理、物理电子学、电路与系统

（试题共 4 页）
（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、选择题（每小题5分，共25分）

1. 函数$f(x)$在$[1,2]$上有二阶导数，且$f(1)=f(2)$，设$F(x)=(x-1)^2 f(x)$，则$F''(x)$在$(1,2)$内（　　）.

(A) 没有零点　　(B) 至少有一个零点

(C) 有两个零点　　(D) 有且仅有一个零点

2. 通过直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$ 和直线 $x=2t+3$，$y=3t-1$，$z=2t+1$ 的平面方程为（　　）.

(A) $x-z-2=0$　　(B) $x+z=0$

(C) $x-2y+z=0$　　(D) $x+y+z=1$

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$（　　）

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 敛散性不能确定

4. 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，且$m>n$，则下列结论中正确的是（　　）.

(A) $|BA|=0$ (B) $|BA|\neq 0$ (C) $|AB|=0$ (D) $|AB|\neq 0$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $5(A+2E)^{-1}$ 相似的矩阵为（ ）.

(A) $\begin{pmatrix}3 & & \\ & 4 & \\ & & 5\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & & \\ & -1 & \\ & & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ (D) 以上结论均不正确

二、填空题（每小题5分，共25分）

1. $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3} x^2\sin t^2 dt\right)=$ ______.

2. 设有直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$，与直线 L_2：$x=5-t,\ y=1-3t,\ z=1+2t$，则 L_1 与 L_2 的夹角为 ______.

3. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=2$ 处发散，则该级数的收敛域为 ______.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ 则 $(A^*)^{-1}=$ ______.

5. 微分方程 $y''-y=xe^{-x}$ 的待定特解形如 $y^*=$ ______.

三、解答下列各题（每题11分，共44分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{2x}. & x>0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. 求可微函数 $f(x)$，使 $\oint_L f(x)(ydx-xdy)=0$，其中 L 为与 y 轴不相交的任何闭曲线，并计算 $\int_{(1,0)}^{(x,y)} f(x)(ydx-xdy)$.

3. 设矩阵 A, X 满足关系式 $A^*XA = 2XA - 8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，(E 为单位阵). 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，试求矩阵 X.

4. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

(1) 求参数 a, b 及特征向量 α 所对应的特征值；

(2) 试问 A 能否相似于对角阵.（要求说明理由.）

四. 计算题（每题 12分，共 36分）

1. 设 $z = f(2x-y) + g(x, xy)$，其中函数 $f(u)$ 二阶可导，$g(s, t)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 计算曲面积分 $I = \oiint\limits_{\Sigma} x(y-z)\,dydz + (x-y)\,dxdy$；其中 Σ 为曲面 $x^2+y^2=4$ 和平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所围立体外表面。

3. 设有四元线性方程组 $AX=b$，系数矩阵A的秩为 3。又已知 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $AX=b$ 的三个解，其中 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$，$\beta_2+\beta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}$，求 $AX=b$ 的通解.

五. 证明题（每题 10分，共 20分）

1. 设曲面方程为 $F(ax+bz, cy+dz)=0$，其中 F 具有连续偏导数，a, b, c, d 为常数，且 $bF_1'(ax+bz) + dF_2'(cy+dz) \neq 0$.

证明：曲面上任意一点处的切平面都与常矢量 $(bc, ad, -ac)$ 平行。

2. 设η_0是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

(1) $\eta_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关；

(2) $\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_{n-r}$线性无关.