

## 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：常微分方程

科目代码：431

适用专业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、不确定性处理的数学、信息安全

(试题共 2 页)

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上不加分)

1、(20 分, 每小题 5 分) 考虑 Cauchy 问题  $dx/dt=f(x)$ ,  $x(t_0)=x_0$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

请选择填空:

- (1) 如果  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续, 则该问题解\_\_\_\_\_。  
 (a) 存在, (b) 存在且唯一, (c) 未必存在, (d) 若存在必唯一。
- (2) 该问题解对初值连续依赖的充分条件是\_\_\_\_\_。  
 (a)  $f$  是连续的, (b)  $f$  是 Lipschitz 的,  
 (c)  $f$  是连续且处处可微的, (d)  $f$  是连续有界的。
- (3) 如果对任意初值条件该问题解  $x(t, t_0, x_0)$  都存在唯一, 则\_\_\_\_\_。  
 (a)  $x(t_0, t, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0)$ , (b)  $x(t, 0, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0)$ ,  
 (c)  $x(t-t_0, 0, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0)$ , (d)  $x(t+t_0, 0, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0)$ 。
- (4) 如果当  $t \rightarrow -\infty$  时任意解  $x(t, t_0, x_0)$  都趋近一个特解  $y(t)$ , 则\_\_\_\_\_。  
 $y(t)$  稳定, (b)  $y(t)$  渐近稳定, (c)  $y(t)$  有界, (d) 前三者都未必。

2、(20 分, 每小题 5 分) 选择填空:

- (1) 下列条件是微分方程  $d^2x/dt^2+a(t)dx/dt=0$  的初值条件的有\_\_\_\_\_。  
 (a)  $x(0)=1, dx(0)/dt=0$ , (b)  $dx(0)/dt=1, d^2x(0)/dt^2=0$ ,  
 (c)  $x(0)=1, dx(1)/dt=0$ , (d)  $dx(0)/dt=1, d^2x(1)/dt^2=0$ 。
- (2) 微分方程  $d^5x/dt^5+a(t)d^4x/dt^4=0$  的解空间是\_\_\_\_\_维的。  
 (a) 5, (b) 4, (c) 3, (d) 2。
- (3) 微分方程  $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$  是恰当的, 当且仅当\_\_\_\_\_。  
 (a)  $\partial M/\partial x=\partial N/\partial y$ , (b)  $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ ,  
 (c)  $\partial M/\partial x=-\partial N/\partial y$ , (d)  $\partial M/\partial y=-\partial N/\partial x$ 。
- (4) 对于连续函数  $f(t,x)$  而言, 常微分方程  $dx/dt=f(t, x)$  的饱和解是指已经无法再延拓的解。因此饱和解  $x(t)$  存在的区间是\_\_\_\_\_。  
 (a) 闭区间, (b) 开区间, (c) 半开半闭区间, (d) 这三种都可能是。

3、(30分, 每小题10分) 假设 Cauchy 问题  $dx/dt=A(t)x, x(t_0)=x_0$  满足解的存在唯一性条件, 其中  $A$  是  $n \times n$  实矩阵、 $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ 。证明:

- (1) 一个解矩阵  $X(t)$  是其基本解矩阵当且仅当对某个  $\tau \in \mathbb{R}$ , 行列式  $\det X(\tau) \neq 0$ 。
- (2) 如果  $A(t)$  关于  $t$  以  $w$  为周期且  $X(t)$  是其基本解矩阵, 则  $X(t+w)$  也是该系统的基本解矩阵并存在可逆矩阵  $B$  使得  $X(t+w)=X(t)B$ 。
- (3) 如果  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds > -\infty$ , 则不存在非零解  $x(t)$  使得  $t \rightarrow +\infty$  时  $x(t) \rightarrow 0$ 。

4、(30分, 每小题10分) 求通解:

- (1)  $2x(y \exp(x^2)-1)dx + \exp(x^2)dy = 0$ , 其中  $\exp$  表示指数函数。
- (2)  $y \ddot{y} - (y')^2 = 0$ 。
- (3)  $dy/dx = x^3 y^3 - xy$ 。

5、(25分) 计算: (1) 齐次方程  $d^2x/dt^2 - 4dx/dt + 4x = 0$  的通解。(2) 非齐次方程  $d^2x/dt^2 - 4dx/dt + 4x = \exp(2t)/t^2$  的通解。(3) 非齐次方程关于初值  $x(1)=0, dx(1)/dt=0$  的解。

6、(25分) 考虑方程组  $\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2, \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2$ 。

- (1) 判断奇点  $(0, 0)$  的定性性质 (类型及稳定性);
- (2) 求通解;
- (3) 画相平面轨道的草图。