四川大學

19

2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

科目代码：612#

适用专业：原子与分子物理、凝聚态物理、光学、高压科学与技术

（试题共 2 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、求解下列各题（80 分，每小题 8 分）：

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

2. 设函数 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

3. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x-t+\dfrac{1}{2}\sin t=0 \\ 2y-t=(t-y)\ln(t-y) \end{cases}$ 所确定的，

求导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

4. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{e^x}{2+e^x+2e^{-x}}dx$

5. 求定积分 $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$

6. 设 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求 $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$

7. 求广义积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

8. 求积分 $\displaystyle\iint\limits_D|3x+4y|\,dxdy$，其中 $D:x^2+y^2\le 1$

9. 设 $u=x-2\sqrt{y}, v=x+2\sqrt{y}$，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$

10．讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$的收敛性

二、（10 分）求二元函数$z=x^2y(4-x-y)$在直线$x+y=6$和$x=0,y=0$所围闭域D上的最大值与最小值。

三、（10 分）设质点 M（x, y）沿曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$运动，质点 A（0, 1）对质点 M 的引力大小为$\frac{k}{r^2}$($k>0$为常数)，r 为两质点 A 与 M 之间的距离，求质点 A 对质点 M 从$B(2, 0)$运动至$O(0, 0)$的引力所做的功。

四、（11 分）求微分方程$y''+a^2y=8\cos bx$的通解$(a>0,b>0)$。

五、(12 分)一带电荷q_1的粒子 A 在球坐标系中位于点$(0, 0, a)$，另一个带电荷为q_2的粒子 B 在离 A 粒子R单位远的点(r, θ, φ)，相互作用势为 $U=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$，试将$U$表示为$r$的函数。

六、（12 分）求函数$f(x)$的表达式。假设二阶可微函数$f(x)$满足方程$\int_0^x(x+1-t)f'(t)dt=e^x+x^2-f(x)$

七、(15 分)将函数$f(x)=\begin{cases}x, & (0<x<\pi)\\ x+2\pi, & (-\pi<x<0)\end{cases}$展开成傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

（1）求系数a_0，并证明$a_n=0$，指出a_n必为零的理由；

（2）求傅里叶级数的和函数$g(x)$，及$g(2\pi)$的值。