四川大學

1

2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

科目代码：431

适用专业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、不确定性处理的数学、信息安全

（试题共 3 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、（本题满分15分）设 x_1, x_2, x_3 是多项式 $f(x)=x^3+ax+1$ 的全部复根。

1 （5分）求行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ 的值。

2 （5分）求 $f(x)$ 的判别式 $D(f)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ 的值。

3 （5分）设 $s_k = x_1{}^k + x_2{}^k + x_3{}^k$，求行列式 $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$ 的值。

二、（本题满分10分）设 $\mathbb{F}$ 是数域，$p(x)\in\mathbb{F}[x]$ 不可约。

1 （5分）证明：$p(x)$ 在复数域上没有重根。

2 （5分）证明：如果 $p(x)$ 与某个多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 有公共的复根，那么必有

$$p(x)\mid f(x)。$$

三、（本题满分15分）设 $\mathbb{F}$ 是数域，$M_n[x]=\{(a_{ij}(x))_{n\times n}: a_{ij}(x)\in\mathbb{F}[x]\}$，即：

$M_n[x]$ 中的 n 阶方阵的元素是 $\mathbb{F}[x]$ 中的多项式。称 $A\in M_n[x]$ 是可逆的，如果存在 $B\in M_n[x]$ 使得 $AB=BA=E_n$，其中，E_n 是 n 阶单位阵，称 B 是 A 的逆矩阵。

1 （5分）证明：关于通常的矩阵的加法和数乘运算，$M_n[x]$ 是 $\mathbb{F}$ 上的无穷维线性空间。

2 （5 分）证明：$A \in M_n[x]$ 可逆当且仅当行列式 $\det(A)$ 是 $\mathbb{F}$ 中的非零数。

3 （5 分）证明：如果 $A \in M_n[x]$ 可逆，那么它的逆矩阵是唯一的。

四、（本题满分 25 分）叙述并证明线性方程组有解的判别定理；当线性方程组有解时，给出它的通解并证明之。

五、（本题满分 20 分）设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$。

1 （7 分）证明 A 可以写成若干初等矩阵的乘积。

2 （8 分）把 A^{-1} 写成 A 的多项式。

3 （5 分）在有理域上 A 是否相似于一个对角阵？说明理由。

数

六、（本题满分 10 分）判断矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是否相似，说明理由。

七、（本题满分 30 分）设 $\mathbb{F}$ 是数域，$gl(n,\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵的全体。对任意 $A, B \in gl(n,\mathbb{F})$，定义：$[A,B] = AB - BA$。

1 （5 分）证明：对任意 $A_1, A_2, A_3 \in gl(n,\mathbb{F})$ 都有：

$$[[A_1, A_2], A_3] + [[A_2, A_3], A_1] + [[A_3, A_1], A_2] = 0。$$

2 （10 分）设 $sl(n,\mathbb{F}) = \{A \in gl(n,\mathbb{F}) \mid tr(A) = 0\}$，其中 $tr(A)$ 表示方阵

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的迹：$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$。证明：$sl(n,\mathbb{F})$ 是 $gl(n,\mathbb{F})$ 的子空间，并写出它的一个基。

3 （7 分）设 D_n 是 $gl(n,\mathbb{F})$ 中的数量矩阵组成的子空间。证明：

$$gl(n,\mathbb{F}) = sl(n,\mathbb{F}) \oplus D_n。$$

4 （8 分）证明：$sl(n,\mathbb{F}) = \{ \sum_{\text{有限和}} [A_i, B_i] \mid A_i, B_i \in gl(n,\mathbb{F}) \}$。

八、（本题满分 10 分）设V是数域$\mathbb{F}$上的n维线性空间，$\underline{A},\underline{B}$是$V$上的线性变换，其中$\underline{B}$可逆。证明，存在无穷多个$t\in\mathbb{F}$使得$\underline{A}+t\underline{B}$可逆。

九、（本题满分 15 分）证明下述$n+1$阶实矩阵A是正定矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2^2}{2} & \frac{2^3}{3} & \cdots & \frac{2^{n+1}}{n+1} \\ \frac{2^2}{2} & \frac{2^3}{3} & \frac{2^4}{4} & \cdots & \frac{2^{n+2}}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{2^{n+1}}{n+1} & \frac{2^{n+2}}{n+2} & \frac{2^{n+3}}{n+3} & \cdots & \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \end{pmatrix}$$