

09年川大数学分析（看论坛上的题不太完整，补充一个完整的）

一、计算极限 $4 \times 7 = 28$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} \quad 4. \text{忘了}$$

二、求积分 $4 \times 10 = 40$

$$1. \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy \quad \text{其中 } D: x^2 + y^2 \leq 1$$

2. $\int_L yz \, ds$ 其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 1$ 的交线 其中后面疑为印刷错误，但尊重原著！（川大老师的原著）

$$3. \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \quad \text{其中 } S \text{ 是 } \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1 - \frac{z}{7}, \text{方向向外侧}$$

4. 一个线积分，忘了具体是什么，不难，证明积分与路径无关，然后取特殊路线计算就出来结果了

三、设 $z = f(x, y)$ 在有界闭域内有连续的二阶连续偏导数，且对任意的 $x \in D$ ，有 $f_{xx}'' + f_{yy}'' = 0, f_{xy}'' \neq 0$ ，证明 $f(x, y)$ 的最大值和最小值只能在 D 的边界上取得。

四、设 $u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz + y$ ，证明在上述变换下 $y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$ ，变成了 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$ 。

五、证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} \sin nx$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内一致收敛

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = f(b)$ ，证明：对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$六、 f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) = f(\xi)$$

已知 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，且对 $\forall x$ 都有 $f'(x) > 0$ ，又 $f(a) = 0$ ，证明 $\exists \xi, \eta \in (a, b)$

$$七、 \text{且 } \xi + \eta = 1, \text{ 有 } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}$$

八、 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，证明： $\int_a^b |f(x)| dx \leq \max \left\{ (b-a) \int_a^b |f'(x)| dx, \left| \int_a^b f(x) dx \right| \right\}$ 。

已知对 $\forall A > 0, f(x)$ 在 $[0, A]$ 上可积，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$ (B 为有限数)

$$九、 \text{证明：} \lim_{t \rightarrow 0^+} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = B$$

上面这些题都是今天坐火车回来时在火车上想起来的，呵呵，可能会缺少一点条件，但是整体上面应该不会差多少，今年川大的数分不难，认真点应该能拿 135+，我很粗心，呵呵