西南师范大学

2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学　　研究方向：各方向

专试科目：数学分析　　编　号：329

注意：数学教育方向做一、二、三、四、八、九、十题，其它方向做一、二、三、四、五、六、七题。

一、求下列极限（每小题5分，共20分）。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$，　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$　ln2

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{x-1}+2^{3x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$，$2\sqrt{2}$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$　取对数

二、（每小题8分，共24分）。

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的导函数，并讨论导函数的连续性。 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdots$

(2) 设 $u=(xy)^2\sin(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，试求 $f^{(n)}(0)$ $(n=1,2,\cdots)$。 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

三、计算下列积分（每小题6分，共18分）。

(1) $\int_0^1\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$　　(2) $\int_0^1 e^{2x}\sin x\,dx$，✓

(3) $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}\}$　$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)dy\,dx$

四、（8分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$f(0)=f(2)$，则存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+1)$。　$F(x)=f(x)-f(x+1)$ 用介值定理 ✓

第一页

五、(10分) 设 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内可导，而且当 $x\in(0,1)$ 时，有 ~~[illegible]~~

$$|f'(x)|\le 1. \quad |f(x)-f(y)|\le|x-y|$$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ 存在． $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内一致连续 $f(0)$ 均存在

六、(10分) 设 $f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\cdots+a_n\ln(1+nx)$，其中 a_i ($1\le i\le n$) 是实数，n 是固定的自然数．若

$$|f(x)|\le|\ln(1+x)| \qquad \forall x\in(-1,1].$$

则必有

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1.$$

$f'(0)$

七、(10分) 设 $f(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上的可微函数，且当 $x\to+\infty$ 时

$F(x)=f(x)+f'(x)$ $\quad e^x F(x)=(e^x f(x))'$ 故 $\int_{x_0}^{x} e^x F(x)dx=\int_{x_0}^{x} e^x f(x)$

$$f(x)+f'(x)\longrightarrow 0$$

证明， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$． 故 $f(x)=\dfrac{\int_{x_0}^{x}e^xF(x)dx+[illegible]}{e^x}$ 洛必达法则

八、(10分) 假设函数 $f(x)$ 在整个实轴上有定义，并且对任意实数 a, b，恒有

$$|f(b)-f(a)|\le|b-a|^2$$

求证：$f(x)$ 恒为常数 $|f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\le\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|$ $\quad f'(x)=0$

九、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$f(a)=f(b)=0$，并且

$$\int_a^b f^2(x)dx=1$$

求证：$\int_a^b x f(x) f'(x)dx=-\frac{1}{2}$

十、(10分) 证明不等式：$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)\ (x>0)$

令 $f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$

$f'(x)$ $\quad f''(x)$ $\quad f''(x)>0$

$f''(x)>f''(0)=0$

$f'(x)>f'(0)>$

$f(x)>f(0)=0$