西南师范大学

2001 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学　研究方向：(数学各方向)除课程与教学论数学教育方向

专试科目：高等代数　编　号：431

一、判断题，正确的答"对"，错误的答"错"，并对错误的命题举出反例给予说明.(每小题5分，共30分.)

1. 若数域F上的某n元线性方程组有解，则其全体解向量可构成F上线性空间F^n的一个子空间. × 非齐次

√2. 对称矩阵的伴随矩阵也是对称矩阵.
$\because AA^* = A^*A = |A|E \quad \therefore (AA^*)' = (A^*)'A = |A|E = A^*A \quad \therefore A^*$对称

√3. 数域F上一元未定元多项式$f(x)$不可约的充分必要条件是对$F[x]$中的多项式$g(x)$和$h(x)$，当$f(x) \mid g(x)h(x)$时，必有$f(x) \mid g(x)$或$f(x) \mid h(x)$.

√4. 在任意非零的有限维欧氏空间中，对任意的正实数r存在无穷多其之间的距离为r的向量对.

×5. 设σ和τ为数域F上n维线性空间V的两个线性变换，若σ与τ具有相同的特征多项式，则σ与τ具有相同的最小多项式.

6. n元二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$负定的

第一页

充分必要条件是A的顺序主子式均小于0.

二. 计算题.(每小题10分,共40分)

1. 求所有λ使$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \neq 0$.

2. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$及$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$是数域$F$上4维线性空间$V$的两个基,且$V$中向量$\alpha$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标为$(1, 2, 3, 4)$,$V$中向量$\beta$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$下的坐标为$(4, 3, 2, 1)$。若基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,试求向量$\alpha+\beta$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$下的坐标.

3. 求λ-矩阵$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的标准形.

4. 通过正交线性替换求二次曲面方程$-3x^2-2y^2-z^2-4xy-4yz+5=0$的标准形,并在相应新的直角坐标系中画出其草图.

三. 证明题.(每小题10分,共30分)

(注:1—3题仅由数学教育学方向考生完成,4—6题由基础数学专业其它各方向考生完成)

1. 试证数域F上n维线性空间V之线性变换σ为数乘变换的充要条件是σ的最小多项式

为一次式.

编号: 431

2. 设 n 阶实对称矩阵 A 是正定的, 试证 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 为单位矩阵.

3. 证明 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

4. 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关, 则

① 等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 中的系数 $k_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 或者全为 0, 或者全不为 0.

② 当存在等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0, \qquad (1)$$

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=0, \qquad (2)$$

其中 $l_1\neq 0$ 时, (1) 和 (2) 的对应系数成比例:

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

6. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值. 试证 $A-\gamma E$ 为正定矩阵的充要条件是实数 $\gamma<\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$.

——试题完——