西南师范大学

2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学系各专业　　研究方向：数学系各方向

考试科目：高等代数　　编　　号：429

注意：报考数学教育方向的考生完成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 题，报考其余方向的考生完成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 题. 考试时间为 3 小时，满分为 150 分.

1. (15 分) 设多项式 $f(x)$ 被 $x-1$, $x-2$, $x-3$ 除后，余式分别为 4, 8, 16，试求 $f(x)$ 被 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除后的余式.

2. (20 分) 计算第 i 行第 j 列位置元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式 D 的值.

3. (15 分) 设 A, B, C 为 n 阶实方阵，且 $BAA' = CAA'$，其中 A' 为 A 的转置. 证明: $BA=CA$.

4. (20 分) 求实二次型 $\sum\limits_{1\le j<k\le n} x_j x_k$ 在正交相似变换下的标准形.

5. (15 分) 设 F 为一个数域，W 为 F^n 的非零子空间，对于 W 中任何向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，或者 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，或者 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全不为零，证明 $\dim W=1$.

6. (15 分) 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵，则 a 为 A 的特征值(即 A 的特征多项式在 F 中的根)的充要条件是 a 是 A 的最小多项式在 F 中的根.

7. (25 分) 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵，且 $A^2 = A$，如果 V_1, V_2 分别为方程组 $AX = 0$ 及 $(A-E)X = 0$ 的解空间，则 F^n 为 V_1, V_2 的直和.

8. (25 分) 设 A, B 为 n 阶方阵.

$A^2B^{-1} + A + B = 0$. $A^2B^{-1} + A = -B$

(1) 若 B 可逆，且 $A^2+AB+B^2 = 0$，试证 A 可逆. $A(AB^{-1}+E) = -B$ $|A||AB^{-1}+E| = -|B| \neq 0$ $\therefore |A| \neq 0$

(2) 若 $AB = A+B$，试证 $AB = BA$.

9. (25 分) 设 A 为实数域上 n 阶反对称阵.

(1) 证明 A 的任意复特征值都是零或纯虚数.

(2) 证明 A 的行列式 $|A| \geq 0$.

10. (25 分) 设 A, C 为 n 阶正定阵，若矩阵方程 $AX+XA = C$ 有唯一解 B，则 B 也是正定阵.