西南师范大学

二○○三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业： 基础数学、应用数学及概率统计　　**研究方向：** 所有方向及课程与教学论专业数学教育学方向

考试科目： 数学分析　　**编　号：** 322

注意：数学教育学和经济管理学方向的考生做一至四及八至十题，其它方向的考生做一至七题.

一、（每小题 10 分，共 40 分）计算下列各题：

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-x-1}{3x}, & x<0;\\ \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t^2}{x^3}dt, & x>0.\end{cases}$　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-x-1}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x}$.　$\displaystyle\int\frac{dx}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}=\int\frac{dx}{\frac{1}{2}(\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))}=\int 2\csc^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx$.

3. $f''(0)$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin(\ln|x|), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin^n x}{1+\cos^2 x}dx$.

二、（20 分）设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{2x_n+2}{x_n+2}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

三、（20 分）设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且存在 $c\in(a,b)$，$f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0$，求证存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)>0$.

四、（20 分）设 $x_{2n-1}=\dfrac{1}{n}$，$x_{2n}=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$，$n=1,2,\cdots$，试证级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 收敛.

五、(15 分) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上非负、连续且 $\int_a^b f(x)dx = 1$，则对任意自然数 k 都有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx dx\right)^2 \leq 1.$$

六、(20 分) 设 f_1 在 $[a,b]$ 上连续，$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt,\ n = 1,2,\cdots$，证明：函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

存在一点 $c\in[a,b]$ 使 $|f(c)| = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$

$\therefore |f_n(x)| \le |f(c)|\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \le |f(c)|\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$

七、(15 分) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 $m(x) = \inf\limits_{a\leq t\leq x} f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

八、(15 分) 求函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值.

九、(20 分) 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

$f(x) = \begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases}$

十、(15 分) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，并满足 $f(a)\cdot f(b) < 0$，$f'(x) \neq 0,\ \forall x\in[a,b]$，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根.

在(a,b)上恒不变号