西南师范大学

年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：　　研究方向：数学教育

试题名称：高等代数　　试题编号：429-1

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号,否则答题无效。）

注意：报考数学教育方向的考生完成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 题，报考其余方向的考生完成 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 题。考试时间为 3 小时，满分为 150 分。

1. (25 分) 计算下面的行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ x & x+2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$。

2. (25 分) 已知齐次线性方程组：

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0 \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0 \\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$，试讨论 a_1，a_2，…，a_n 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解。在有非零解时，求此方程组的一个基础解系。

3. (20 分) 设 V 为数域 F 上的 n 阶方阵构成的线性空间，A 为 F 上一个固定的 n 阶方阵，定义 $T(B)=AB-BA$，其中 B 为 V 中任一向量，证明：(1) T 为 V 的线性变换；(2) 若 A 为幂零矩阵，则 T 为幂零线性变换。

4. (20 分) 设 R^2 为实数域 R 上的 2 维线性空间，R^2 的线性变换 T 在基 $e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，证明：

(1) 设 W_1 是由 e_1 张成的 R^2 的子空间，则 W_1 是 T 的不变子空间；

(2) R^2 不能表成 T 的任何不变子空间 W_2 与 W_1 的直和。

5. (20 分) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交线性替换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的值及所用的正交线性替换。

6. (20 分) 设 $f(x)=(f(x),f'(x))g(x)$，且 $g(x)$在复数域内只有二个根 2，-3，又 $g(1)=-20$，试求 $g(x)$；若 $f(0)=1620$，则 $f(x)$能否被确定？

7. (20 分) 设 V 为 n 维欧氏空间，α,β,γ 为 V 中线性无关的固定向量。

证明：(1) $W=\{\xi \mid (\xi,\alpha)=(\xi,\beta)=(\xi,\gamma)=0, \xi\in V\}$ 为 V 的一个子空间。

(2) $\dim W=n-3$。

8. (20 分) 设 $f(x)$，$g(x)$为数域 F 上多项式，证明$(f(x),\ g(x))=1$ 的充分必要条件是$(f(x)+g(x),\ f(x)g(x))=1$。

9. (20 分) 在实数域 R 上线性空间 $M_n(R)$上(其中 $M_n(R)$为 R 上所有 n 阶方阵之集)定义一个二元实函数

$$(A,B)=Tr(A'B), \forall A,B\in M_n(R),$$

(1) 验证上述定义是 $M_n(R)$的内积，从而构成欧氏空间。

(2) 设 $A\in M_n(R)$，定义 $M_n(R)$的一个线性变换：

$$\sigma: X\to AX, \forall X\in M_n(R)$$

证明：σ 是欧氏空间 $M_n(R)$的正交变换的充分必要条件是 A 为正交矩阵。($Tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹，A' 表示矩阵 A 的转置)。