西南师范大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学　　　　研究方向：数学类各方向

试题名称：数学分析　　　　试题编号：322

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效。）

一、填空题（本题共6小题，每小题6分，满分36分。把答案填在题中的横线上）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=$______________。

2. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$______________。

3. 设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，

   则 $f_x(0,1,-1)=$______________。

4. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$______________。

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{\alpha x}=\int_{-\infty}^{\alpha}te^t dt$，则常数 $\alpha=$______________。

6. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，则 $f^{(n)}(x)=$______________。

二、选择题（本题共6小题，每小题6分，满分36分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

A. 等于零　　B. 存在但不等于零　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在　　【　　】

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$　　【　　】

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数　B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

D. 当 $f(x)$ 为递增函数时，$F(x)$ 必为递增函数　　【　　】

4. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为4。且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，

则曲线 $y=f(x)$ 在点（$5,f(5)$）处的斜率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. -1　　D. -2　　【　　】

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为

A. 不存在间断点　　　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　D. 存在间断点 $x=-1$　　【　　】

6. 设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小量，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)dt$ 的

A. 低阶无穷小量　　　　B. 高阶无穷小量

C. 同阶但不等价的无穷小量　　D. 等价无穷小量　　【　　】

三、（本题满分20分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)=-\frac{x}{2}f(x)$，$f(0)=1$，

证明 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$　　$(-\infty<x<+\infty)$

四、（本题满分20分）

设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导函数的周期函数，且 f 非常函数。则 f 有最小正周期。

五、（本题满分18分）

设 $\sum a_n$ 为正项级数。证明

1. 若存在正数 α 及正整数 N，使当 $n\ge N$ 时，有 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\ge 1+\alpha$，则 $\sum a_n$ 收敛。

2. 若存在正整数 N，使当 $n\ge N$ 时，有 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\le 1$，则 $\sum a_n$ 发散。

六、（本题满分20分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且 $f(a)\ge a$，$f(b)\le b$，证明存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=x_0$