西南大学

年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学　　研究方向：数学各方向

试题名称：数学分析　　试题编号：322

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号,否则答题无效。）

说明：会计学及数学教育方向考生做一、二、三、四、五、六题，其余方向考生做一、二、四、五、六、七、八题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分。把答案填在题中的横线上）

1．已知 $x_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=$ ________。

2．设 $y=x^3-8x+7$，$x=\varphi(t)$，且 $\varphi(0)=3$，$\varphi'(0)=2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ ________。

3．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ________，$b=$ ________。

4．设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1+\arctan\dfrac{x}{y}$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________。

5．设 $n\geq 1$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}dx=$ ________。

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．设 f 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在，则 f 在 (a,b) 内　【　】

A. 有界　　B. 无界　　C. 有最大值　　D. 有最小值

2．设 f 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=$　【　】

A. $n[f(x)]^{n+1}$　　B. $n![f(x)]^{n+1}$　　C. $(n+1)[f(x)]^{n+1}$　　D. $(n+1)![f(x)]^{n+1}$

3. 若 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在该点处 【 】

A. 二重极限存在　B. 连续　C. 可微　D. 以上结论都不成立

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域内 【 】

A. 一致收敛　B. 每一点绝对收敛　C. 连续　D. 可微

5. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)=$ 【 】

A. xy　B. $2xy$　C. $xy+\frac{1}{8}$　D. $xy+1$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 设 $x_n = \frac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{n}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{x}=1$，令

$F(x)=\int_0^1 f(xy)dy$，求 $F'(x)$，并证明 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

3. 求 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

4. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和

四、（本题满分 15 分）

设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)=0$。证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)-\frac{1}{2}f(\xi)=0$。

五、（本题满分 15 分）计算第一型曲面积分 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$

其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $z=0$ 所围上半球体的边界曲面。

六、七、八题在第三页

六、（本题满分 20 分）

设 f,g 都在 $[0,1]$ 上递增且连续，证明

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \ge \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx \text{。}$$

七、（本题满分 20 分）

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)f(b)<0$，且 $f'(x)\cdot f''(x)\ne 0$，$(a\le x\le b)$。令

$$x_0=a\text{，}\quad x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

证明 数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)=0$

八、（本题满分 20 分）

设 $x_1,x_2,\cdots x_n\in(-\infty,+\infty)$，$(n\in N^+)$。证明 $n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\ge(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$

且上式等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$