西南大学

二○○八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：　　　　　　　　研究方向：

试题名称：量子力学　　试题编号：487

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号,否则答题无效。）

一、(10分)判断下列说法是否正确

（1）自由粒子所处状态一定为平面波.

（2）一体系的哈密顿量不显含时间t，则体系处于定态.

（3）量子体系的能量总是量子化的.

（4）量子体系的角动量总是量子化的.

（5）两个力学量不对易，则它们不能具有共同本征态.

二、(15分)简要回答下列问题

1. 求一个具有5MeV能量的α粒子的德布罗意波长,并讨论当它穿过原子时是否可用经典力学处理,为什么?。

2. 波函数ψ和$e^{i\alpha}\psi$（α为实数）描述的是体系的同一状态吗？为什么？

3. $i\dfrac{d}{dx}$是厄米算符吗?为什么?

4. 设粒子处于动量为$\bar{p}_0$的本征态，写出此状态在坐标表象和动量表象中的表达式.

5. 一粒子在一维势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & x>0\end{cases}$$

中运动，写出其能量表达式.

三、(15分)一质量为μ、自旋为1/2的粒子在$0\le x\le a$的无限深势阱中运动，已知$t=0$时粒子处于波函数

$$\Psi(x,S_z,0)=C\sin\frac{\pi x}{a}\left(\chi_+ +\cos\frac{\pi x}{a}\chi_-\right)$$

其中$\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\chi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$分别是自旋向上和自旋向下的自旋波函数.

（1） 能量是否为粒子的守恒量?

（2） $\Psi(x,S_z,0)$所描写的状态是否为定态?

（3） 写出在 t=0 时S_z的可能值及对应的几率.

（4） 写出 t 时刻描写粒子状态的波函数$\Psi(x,S_z,t)$.

四、（15 分）（1）证明任一力学量的平均值的时间导数由下式给出：$i\hbar\dfrac{d\langle A\rangle}{dt} = \langle [A,H]\rangle + i\hbar\left\langle \dfrac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$；（2）推导维里定理：$2\langle T\rangle = \langle \vec{r}\cdot\nabla V\rangle$，式中$V$是粒子的势能，而$T$是粒子的动能算符.

五、(20 分)设(L^2, L_Z)分别是角动量平方算符和角动量 z 分量算符，其共同本征态为$|l,m\rangle$。定义升降算符

$$L_\pm = L_x \pm iL_y$$

证明:

（1） $[L_Z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$，$[L_+, L_-] = 2\hbar L_Z$；

（2） $L_\pm L_\mp = L^2 - L_Z^2 \pm \hbar L_Z$，$L_+L_- + L_-L_+ = 2(L^2 - L_Z^2)$；

（3） $L_\pm|l,m\rangle = \sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\hbar|l,m\pm1\rangle$.

六、(15 分)一质量为 m 的粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<a \\ \infty, & x<0, x>a \end{cases}$$

中运动，求

(1)粒子的能量和波函数；

(2)粒子处于第n个本征态时对侧壁的平均作用力.

七、(20 分)考虑在无限深势阱($0<x<a$)中运动的两电子体系，若忽略两电子间的一切相互作用，写出体系基态和第一激发态的波函数.

八、(20 分)(1) 证明 HF 定理：设体系的哈密顿算符 $\hat{H}$ 含有某参量λ，且 $\hat{H}$ 的本征值 E_n 的归一化本征函数(束缚态)为 ψ_n (n 为表征本征态的一组量子数)，则

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda}=\left(\psi_n,\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}\psi_n\right)\equiv\left\langle\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}\right\rangle_n$$

(2) 已知一维谐振子的哈密顿算符为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2,$$

其本征态为 $\psi_n(x)$，相应的能量本征值为

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\hbar,\quad n=0,1,2,\cdots$$

试用 HF 定理求在本征态 $\psi_n(x)$ 下动能和势能的平均值.

九、(20 分)一个具有恒定转动惯量 I 和偶极矩 $\vec{D}$ 的刚性转子，放在均匀电场 $\vec{E}$ 中，其哈密顿算符为

$$\hat{H}=\frac{1}{2I}\hat{L}^2-DE\cos\theta$$

其中 $\hat{L}^2$ 是角动量平方算符，θ 是偶极矩与外电场的夹角. 把电场看作是一种微扰，试求对转子能级的第一个非零修正值.

注：$\cos\theta Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}Y_{l-1,m}(\theta,\varphi)$