西 南 大 学

年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学学科各专业 研究方向：数学学科各方向

试题名称：高等代数 试题编号：419

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号,否则答题无效。）

1. (20 分) 指出下列命题是否正确,并简述理由.

(1) 整系数多项式 x^2+x+1 整除 $x^{17}+x^7+1$。

(2) 若 p 是素数，则 x^p+px+1 是不可约整系数多项式。

(3) 存在矩阵 A、B 使 AB−BA=E，其中 E 是单位矩阵。

(4) 两个对称矩阵之积仍是对称矩阵。

(5) 设 F 是一个包含 3 个元素的有限域，V 是 F 上的 2 维向量空间，则 V 恰含 4 个 1 维子空间。

2. 计算（20 分）

(1) $n\geq 3$，求行列式的值 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

(2) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的逆矩阵。

3.（20 分）设 A、B 都是 n 阶方阵，用 r 表示矩阵的秩，证

$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)\leqslant n+r(AB)$

4.（20 分）设 A 是一个元素都是 1 的 n（$n\geq 2$）阶方阵，求

的特征多项式与最小多项式。

5.（20 分）问λ为何值时线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=\lambda^2\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=\lambda^3\end{cases}$

没有解、有唯一解、有无穷多解？

6.（20 分）设 A 是 n 阶正定矩阵，证明它的行列式$|A|\leqslant$A 的

主对角线元素之积，等式成立当且仅当 A 是对角阵。

7.（20 分）设α_1，…，α_n是实欧氏空间的一组向量，证明这

组向量线性无关当且仅当它们的 Gram 矩阵 A=（a_{ij}）可逆

其中 a_{ij} =（α_i，α_j）。

8.（10 分）假定实方阵 A 的特征值全为正，且主对角线元素

全为 1，证明 A 的行列式$|A|\leqslant 1$。