西南大学

年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学所有专业 研究方向：数学所有方向

试题名称：数学分析 试题编号：604

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效。）

一 计算题（本大题共 50 分）

1. 设 $f(x)=(x^{223}-1)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\varphi(1)=9$，求 $f'(1)$ （7 分）。

2. 求极限（每小题 7 分，共 14 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2n^2}\right)$。

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$。

3. 求积分（第 1 小题 9 分，第 2 小题 6 分，共 15 分）

（1）求不定积分 $\int xe^x\cos x dx$。

（2）求定积分 $\int_{-1}^{3}\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}x^2\}\,dx$，$\min S$ 表示数集 S 中最小的数。

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 （8 分）。

5. 求 $\int_{AB}(x^2+y)dx+(x-y^2)dy$，其中 AB 为由 $A(0,0)$ 至 $B(1,1)$ 的曲线 $y^3=x^2$（ 6 分）。

二 回答下列问题（第 1 题 5 分，第 2 题 8 分，共 13 分）

1、试举出定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的例子，使 $f(x)$ 仅在 $x=1,2,3$ 三点处连续，而其余的点都是 $f(x)$ 的第二类间断点。

2、叙述极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的柯西准则，. 并应用它证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在。

三 下列命题是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请给出具体的例子（判断正确，每题给 2 分，理由也正确，每题再给 4 分；即每题满分 6 分，共 36 分）。

1. 若对于每一正整数 p 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在区间 I 上一致连续. 则 $f(x)g(x)$ 在 I 上也一致连续。

3. 设 $f(x)$ 在 a 的某邻域内有定义，且在 a 处连续，又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=b$, 则 $f(x)$ 在 a 处的导数存在且等于 b。

4. 若闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有如下性质：$[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}], n=1,2,\dots$

则 存在 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$。

5. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛。

6. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

四　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有连续二阶导数，$f(0)=0$, 且 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$,

证明 $g(x)$ 可导且导函数连续　（10 分）。

五　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)=0$，

证明至少存在一点 $c\in(a,b)$，使 $f'(c)=f(c)g'(c)$　（8 分）。

六　若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 D 上一致收敛于 $f(x)$，且每一项在 D 上都是连续的，证明 $f(x)$ 在 D 上连续　（10 分）。

七　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $|f'(x)|\le L, x\in(0,1)$，　证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{L}{n}$$

（8 分）。

八　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 试证：对任意一组正数 $m_1,m_2,\cdots,m_k$，存在 $(0,1)$ 内 k 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，使得 $x_1<x_2<\cdots<x_k$，且

$$\frac{m_1}{f'(x_1)}+\frac{m_2}{f'(x_2)}+\cdots+\frac{m_k}{f'(x_k)}=m_1+m_2+\cdots+m_k$$

（15 分）。