西 南 大 学

2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：理论物理、凝聚物理、光学　研究方向：各方向

试题名称：高等数学　　　　试题编号：613

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效。）

一、填空题（本题共10小题，每小题3分，满分30分）

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x+1)^n$ 的收敛域为________.

2. v 在 u 的梯度方向上的方向导数是________________.

3. 设 C 是 $x^2+y^2=1$ 的正向一周，则 $\oint_C e^{\sin x}dx+e^{\cos y}dy$ 等于________.

4. 设 $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t\le l \\ 0, & l<t\le 2l \end{cases}$，则其以 $2l$ 为周期的傅里叶级数在 $t=l$ 处收敛于________.

5. 定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$________.

6. 微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解为__________.

7. 设 A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$__________.

8. 向量组 $\alpha_1=(1,0,0,0)$，$\alpha_2=(1,1,0,0)$，$\alpha_3=(1,1,1,0)$，$\alpha_4=(1,1,1,1)$，$\alpha_5=(0,0,0,1)$ 的秩为__________.

9. 设五元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩4，已知 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\vec{\eta}_1=(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$，$\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$，则该方程组的通解为______.

10. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，-1，则行列式 $|3A-E|$ 的值为______.

二、选择题（本题共10小题，每小题3分，满分30分）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 点处

A. 导数为 2　　B. 导数为 1

C. 导数为 0　　D. 导数不存在　　[ ]

2. 函数在原点具有连续的二阶导数，且 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-2$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$

A、－1　　B、0　　C、－2　　D、不存在　　[ ]

3. 矢量函数 $\vec{a}(t)$ 在M点的导数 $\dfrac{d\vec{a}(t)}{dt}$ 的方向为

A. 与 $\vec{a}(t)$ 平行

B. 与 $\vec{a}(t)$ 垂直

C. 沿曲线 $\vec{a}=\vec{a}(t)$ 在M点的切线方向

D. 沿曲线 $\vec{a}=\vec{a}(t)$ 在M点的法线方向　　[ ]

4. 设有直线 L: $\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 π: $4x-2y+z-2=0$，则直线 L

A. 平行于 π　　B. 垂直于 π　　C. 在 π 上　　D. 与 π 斜　　[ ]

5. 微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2dy}{dx}+y=0$ 的解为

A. xe^{-x}　　B. $-xe^{x}$　　C. x^2e^{-x}　　D. xe^{x}　　[ ]

6. 下列级数中，条件收敛的级数是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\pi^{n-1}}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$　　[ ]

7. n元齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件是

A. $|A|=0$　　B. 秩$(A)-n<0$

C. 秩$(A)-n=0$　　D. 方程的个数>n　　[ ]

8. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r_A = m < n$，I_m 为 m 阶单位矩阵，下列结论中正确的是

A. A 的任意 m 个列向量必线性无关

B. A 的任意一个 m 阶子式不等于零

C. A 通过初等行变换必可化为 $(I_m \quad O)$

D. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 一定有无穷多组解 [ ]

9. 设 A 为 4 阶矩阵，$|A| = a \neq 0$，则其伴随矩阵 A^* 的行列式 $|A^*| =$

A. 1　B. a　C. a^2　D. a^3 [ ]

10. 若向量组 α,β,γ 线性无关，向量组 α,β,δ 线性相关，则

A. α 必可由 β,γ,δ 线性表示　B. β 必不可由 α,γ,δ 线性表示

C. δ 必可由 α,β,γ 线性表示　D. δ 必不可由 α,β,γ 线性表示 [ ]

三、(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \ln(1+\sin 2t)dt$.

2. 已知 $x=\ln(1+t^2), y = t - arctgt$，求 $\frac{dy}{dx}$.

3. 设 $z = u^2 + v^2, u=\cos xy^2, v = \sin x^2 y$，求 dz.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的区域.

5. 求方程 $y''-2y'-3y=e^{3x}+\cos x$ 的通解.

四、(本题满分 10 分)

将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le 1)$ 分别展为傅里叶正弦级数和余弦级数.

五、(本题共 2 小题，每小题 12 分，满分 24 分)

1. 设三维向量空间一个线性变换，它对于基底 $\vec{e}_1=(1,0,0)$，$\vec{e}_2=(0,1,0)$，$\vec{e}_3=(0,0,1)$ 的表达式

为 $\begin{aligned} y_1 &= 5x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 + 3x_3 \end{aligned}$ 若把基底更换为新基底 $\vec{e}_1'=(1,0,0)$，$\vec{e}_2'=(1,1,0)$，$\vec{e}_3'=(1,1,1)$，

(1) 求出过渡矩阵 C；

(2) 求该变换对于新基底的矩阵.

2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+x_3{}^2-4x_1x_2-4x_2x_3-8x_3x_1$ ，

(1) 写出 f 的矩阵 A;

(2) 求出 A 的特征值和线性无关的特征向量;

(3) 将二次型化为标准形，并写出相应的变换。

六、(本题满分 8 分)

设 A 为 n 阶不可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，且 A^* 的秩 $r_{A^*}\neq 0$，证明齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系中含有 1 个线性无关的解向量.

七、(本题满分 8 分)

设 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ，$\vec{a}$ 为常矢量，证明：$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{r})=2\vec{a}$.