

西南大学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业:

研究方向:

试题名称: 数学

试题编号: 622

(答题一律做在答题纸上, 并注明题目番号, 否则答题无效)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) =$ _____;

2、若 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x} , 则 $\int d \int f(x) dx =$ _____;

3、 $\int_{-1}^2 x \sqrt{|x|} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ _____;

4、设 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y \partial x} =$ _____;

5、若 A 为 n 阶方阵且满足 $A^T A = E, |A| = -1$, 则 $|A + E| =$ _____;

6、已知向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 0)$, $\alpha_2 = (3, -1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (x, 0, -3, 1)$ 的秩等于 2, 则 $x =$ _____;

7、已知 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(A|B) = 0.32$, 则 $P(\overline{A \cup B}) =$ _____。

二、单项选择题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1、设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可微, 则 ()

A、在 $[a, b]$ 上连续 B、若 $f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调, 则 $f'(x) \neq 0$

C、若 $f(x)$ 严格单调增加, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 单调减少

D、在 (a, b) 内 $f(x)$ 必存在极限

2、设函数 $f(x) = g(x) \sin x$, 且 $g(0) = 2, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$, 则 ()

A、 $f'(0) = 0$ B、 $f'(0) = 2$

C、 $f'(0) = 3$ D、 $f'(0)$ 不存在

3、下列论断中正确的是: ()

- A、导数不存在的点不是极值点
- B、驻点必是极值点
- C、若在极值点的导数存在, 则此极值点必是驻点
- D、若驻点不是极值点, 则不可导点必是极值点

4、设 $F'(x) = G'(x)$, 则下列结论中正确的是 ();

- A、 $\int dF(x) = \int dG(x)$
- B、 $F(x) = G(x) + 1$
- C、 $F(x) = G(x)$
- D、 $[\int F(x)dx]' = [\int G(x)dx]'$

5、设 A 为 n 阶方阵, 且秩 $R(A) = n - 1$, α_1, α_2 是 $AX=0$ 的两个不同的解向量, 则 $AX=0$ 的通解为 ()

- A、 $k\alpha_1$
- B、 $k\alpha_2$
- C、 $k(\alpha_1 + \alpha_2)$
- D、 $k(\alpha_1 - \alpha_2)$

6、设随机变量 X 的分布律为: $P(X = k) = a \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 1, 2, \dots$ 其中 $\lambda > 0$

则 $a = ()$

- A、1
- B、 $(1 - e^{-\lambda})^{-1}$
- C、0
- D、-1

7、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $X_i = \begin{cases} 1, & \text{事件} A \text{ 发生} \\ 0, & \text{事件} A \text{ 不发生} \end{cases}, i = 1, \dots, 100$, 且 $P(A) = 0.8$,

X_1, X_2, \dots, X_{100} 相互独立。令 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, 则由中心极限定理

知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于 ()。

- A、 $\Phi(y)$
- B、 $\Phi(\frac{y-80}{4})$
- C、 $\Phi(16y+80)$
- D、 $\Phi(4y+80)$

三、(8分) 设曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 试求 a 以及切线方程。

四、(10分)

1、(5分) 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 设 $F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$ 计算 $F''(x)$

2、(5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

五、(8分)

计算积分 $I = \iint_D (x^2 + y^2 + 2) dx dy$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

六、(12分)

设当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = e^x - (ax^2 + bx + 1) = o(x^2)$,

求常数 a, b 。

七、(10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可微, 且 $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$

试证明: $f(x) = e^x$, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时

八、(8分) 证明: 当 $x > 0$ 时, 有 $\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$

九、(8分) 已知方程 $x^2 y^2 + y = 1 (y > 0)$ 确定 $y = y(x)$, 求出 $y = y(x)$ 的所有极值, 并判断其为极大还是极小。

十、(8分) 求微分方程

$xy' + y = xe^{-x}$, 在 $y|_{x=1} = \frac{1}{e}$ 条件下的特解。

十一、(11分) 设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases}$$

1、试确定常数 a, b 的值

2、求 EX, DX

3、设 $Y = \sin X, Z = \cos X$. 求协方差 $\text{cov}(Y, Z)$

十二、(11分)

1、(5分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关。

2、(6分) 设
$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 此方程有无穷多解, 并求其解。