

# 西南大学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：环境科学 研究方向：环境科学各方向

试题名称：高等数学 试题编号：625

(答题一律做在答题纸上,并注明题目番号,否则答题无效。)

## 一 选择题 (20 分)

1 设  $a, b$  为常数, 且  $b > a$ , 函数  $y = f(x)$  定义域  $(-\infty, +\infty)$ , 它的图形既对称于直线  $x = a$ , 又对称于直线  $x = b$ , 则  $f(x)$  必是 ( )

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

2 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(x - \sin x)$  是  $x^2$  的 ( )

(A) 低阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 等阶但非等价的无穷小

3 若曲线  $y = x^2 + ax + b$  和  $2y = -1 + xy^3$  在点  $(-1, 1)$  处相切, 其中  $a, b$  是常数, 则  $a$  和  $b$  的值为 ( )。

(A)  $a = 0, b = -2$

(B)  $a = 1, b = -3$

(C)  $a = -3, b = 1$

(D)  $a = -1, b = -1$

4 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则在区间  $(0, 1]$  上是 ( )。

(A) 连续但不一致连续

(B) 连续且一致连续



(C) 不连续

(D) 一致连续

5 下列结论正确的是 ( )。

(A)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  和  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  都收敛

(B)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  和  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  都发散

(C)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  发散,  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  收敛

(D)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  收敛,  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  发散

二 填空题 (20 分)

6 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$  是  $x$  的 5 阶无穷小, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_。

7 设  $f(x)$  是区间  $(-\infty, +\infty)$  上的奇函数, 且图形关于  $x = 2$  对称, 则  $x$  是以 \_\_\_\_\_ 为周期的周期函数。

8 函数  $y = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$  的定义域是 \_\_\_\_\_。

9 微分方程  $x \frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{xy}$  的通解为 \_\_\_\_\_。

10 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} =$  \_\_\_\_\_。



三 解答题 (11~18 小题, 共 110 分。应写出必要的文字说明、证明过程和演算步骤。)

11 (10 分)、求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n^2}$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

12 (21 分)、计算下列不定积分:

(1)  $\int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx$

(2)  $\int \frac{3x^2 - x + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 2} dx$

(3)  $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$

13 (14 分)、求解下列问题:

(1) 求二阶偏导数: 已知  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ , 求  $z''_{xy}$ 。

(2) 求函数的全微分: 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 + y^2 + z^2 = ye^z$  所确定的隐函数, 求  $dz$ 。



14 (12 分)、计算积分  $\iint_D \frac{1}{y^2 + x} dx dy$ , 其中  $D$  是  $x=0, y=1, y=x$  围成的区域

15 (11 分)、设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 并且对每一个  $x \in [a, b]$ , 存在一个  $y \in [a, b]$ , 使得  $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$ 。试证: 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ 。

16 (13 分)、求定解问题 
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = \cos 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$
 的解。



17 (14 分)、设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  , 讨论函数

的连续性和可微性。

18 (15 分)、求级数:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

1 设  $a, b$  为常数, 且  $b > a$ , 函数  $y = f(x)$  定义域  $(-\infty, +\infty)$ , 它的图形既对称于直线  $x = a$ , 又对称于直线  $x = b$ , 则  $f(x)$  必是 ( )

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

2 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(x - \sin x)$  是  $x^2$  的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小  
(C) 等价无穷小 (D) 等阶但非等价的无穷小

3 若曲线  $y = x^2 + ax + b$  和  $2y = -1 + xy^3$  在点  $(-1, 1)$  处相切, 其中  $a, b$  是常数, 则  $a$  和  $b$  的值为 ( )

(A)  $a = 0, b = -2$  (B)  $a = 1, b = -3$   
(C)  $a = -3, b = 1$  (D)  $a = -1, b = -1$

4 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则在区间  $(0, 1]$  上是 ( )

(A) 连续但不一致连续 (B) 连续且一致连续