绝密★启用前

2008年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1．答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2．答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。

3．填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4．考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$ 的零点个数为 B

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

（2）函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于

（A）$\boldsymbol{i}$.　　（B）$-\boldsymbol{i}$.　　（C）$\boldsymbol{j}$.　　（D）$-\boldsymbol{j}$.

（3）在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1, C_2, C_3为任意常数) 为通解的是

（A）$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　（B）$y'''+y''+4y'+4y=0$.

（C）$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　（D）$y'''-y''+4y'-4y=0$.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　（B）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

（C）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　（D）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

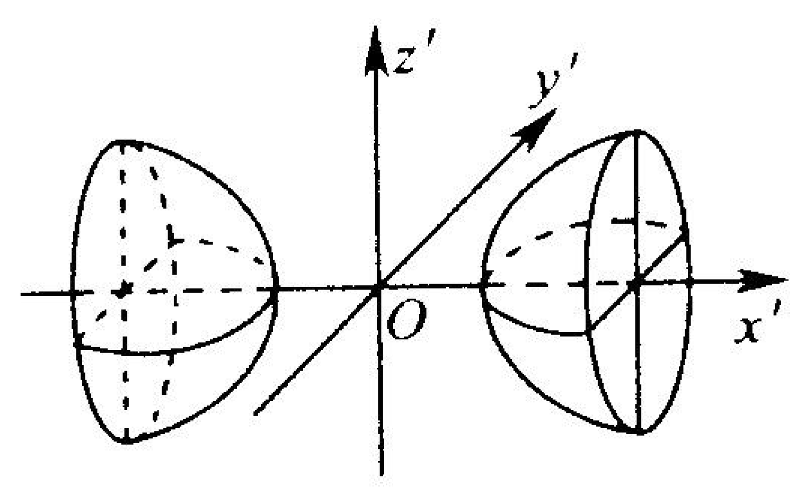
（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则

（A）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　（B）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

（C）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　（D）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$$



在正交变换下的标准方程的图形如图所示，则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

（7）设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

（A）$F^2(x)$.　　（B）$F(x)F(y)$.

（C）$1-[1-F(x)]^2$.　　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$.

（8）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$.　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$.

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$.　　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9） 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ x ________.

（10）曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

（11）已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

（12）设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（13）设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

（14）设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

（16）（本题满分 9 分）

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

（17）（本题满分 11 分）

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

（18）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是连续函数，

（Ⅰ）利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

（Ⅱ）当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

（19）（本题满分 11 分）

将函数 $f(x)=1-x^2\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

（20）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置.
证明：

（Ⅰ）秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

（21）（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}\quad(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ）求 $P\{Z\leqslant\frac{1}{2}\big|X=0\}$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本.记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,\ T = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2.$$

（Ⅰ）证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

（Ⅱ）当 $\mu = 0,\ \sigma = 1$ 时，求 DT.