绝密★启用前

2008年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1．答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2．答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。

3．填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

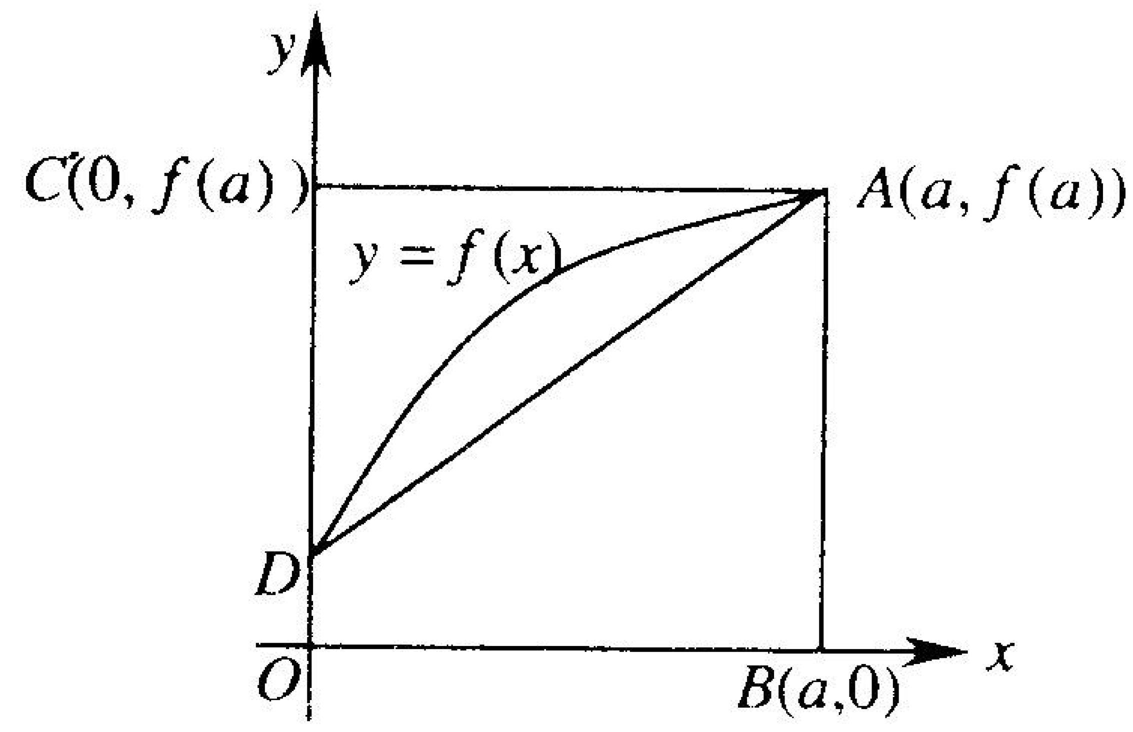
4．考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

（2）如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于



（A）曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

（B）梯形 $ABOD$ 的面积.

（C）曲边三角形 ACD 的面积.

（D）三角形 ACD 的面积.

（3）在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1$，$C_2$，$C_3$为任意常数）为通解的是

（A）$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　（B）$y'''+y''+4y'+4y=0$.

（C）$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　（D）$y'''-y''+4y'-4y=0$.

（4）设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有

（A）1 个可去间断点，1 个跳跃间断点.

（B）1 个可去间断点，1 个无穷间断点.

（C）2 个跳跃间断点.

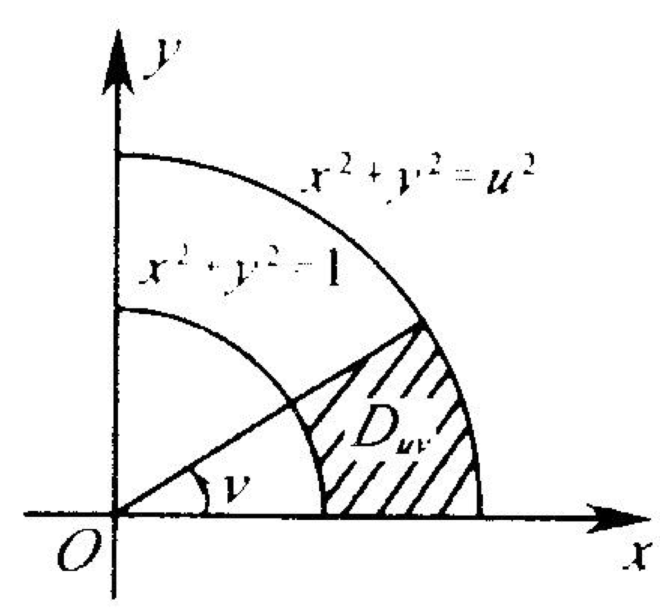
（D）2 个无穷间断点.

（5）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　（B）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

（C）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　（D）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

（6）设函数 f 连续．若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$



（A）$vf(u^2)$.

（B）$\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

（C）$vf(u)$.

（D）$\dfrac{v}{u}f(u)$.

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则

（A）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆. （B）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

（C）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆. （D）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

（8）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为

（A）$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$. （B）$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. （C）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. （D）$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ ___2___.

（10）微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ___$-xe^{-x}+Cx$___.

（11）曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是 ___$y=x+1$___.

（12）曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 ___$(0,0)$___.

（13）设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ___$\frac{\sqrt2}{4}\ln2-\frac{\sqrt2}{4}$___.

（14）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，3，λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$，则 $\lambda=$ ___-1___.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\,du\end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0,\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)（本题满分 9 分）

计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(18)（本题满分 11 分）

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\} dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(19)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0$, $x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\eta)(b-a)$；

（Ⅱ）若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3 \varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)（本题满分 11 分）

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

(22)（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

（23）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值-1，1 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.