绝密★启用前

2008年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（四）

（科目代码：304）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$

（A）a.　　（B）a^{-1}.　　（C）b.　　（D）b^{-1}.

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的

（A）跳跃间断点.　（B）可去间断点.　（C）无穷间断点.（D）振荡间断点.

（3）设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$g(x)$ 是连续的偶函数，区域

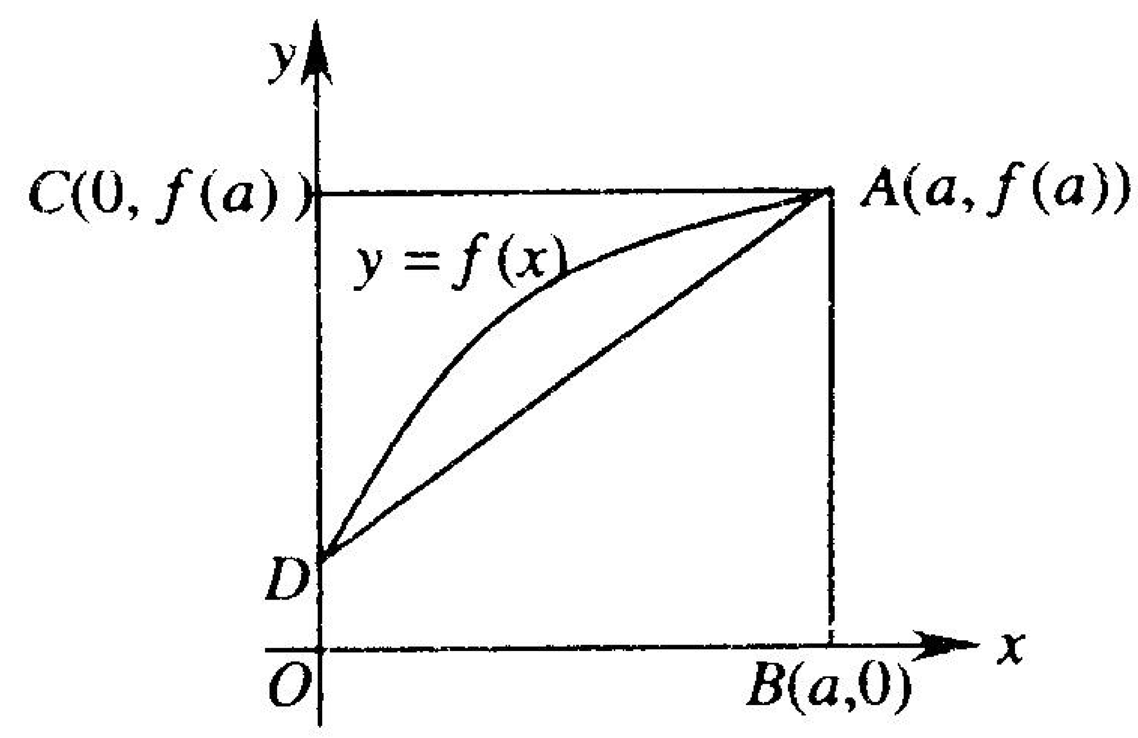
$$D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\right\},$$

则以下结论正确的是

（A）$\iint\limits_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.　　（B）$\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

（C）$\iint\limits_D [f(x)+g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.　　（D）$\iint\limits_D [f(y)+g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

（4）如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于



（A）曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

（B）梯形 $ABOD$ 的面积.

（C）曲边三角形 ACD 的面积.

（D）三角形 ACD 的面积.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则

（A）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　（B）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

（C）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　（D）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

（6）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为

（A）$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　（C）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

（7）设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

（A） $F^2(x)$.　　　　（B） $F(x)F(y)$.

（C） $1-[1-F(x)]^2$.　　　　（D） $[1-F(x)][1-F(y)]$.

（8）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

（A） $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　　　（B） $P\{Y=2X-1\}=1$.

（C） $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　　　（D） $P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\leqslant c, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ __1__.

（10）已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处的切线方程是________.

（11）$\int_1^2 dx\int_0^1 x^y \ln x dy=$________.

（12）微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$________.

（13）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为________.

（14）设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt\ (0<x<1)$，求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

（17）（本题满分 11 分）

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

（18）（本题满分 10 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有 2 阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（Ⅰ）求 $\mathrm{d}z$;

（Ⅱ）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

（Ⅰ）证明对任意的实数 t，有 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

（Ⅱ）证明 $G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

（20）（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

（21）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值−1，1 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ）求 $P\{Z\leqslant\frac{1}{2}|X=0\}$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设某企业生产线上产品的合格率为 0.96，不合格产品中只有 $\frac{3}{4}$ 的产品可进行再加工，且再加工的合格率为 0.8，其余均为废品. 已知每件合格产品可获利 80 元，每件废品亏损 20 元，为保证该企业每天平均利润不低于 2 万元，问该企业每天至少应生产多少件产品？