西南大学

2008年攻读~~博~~硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学　　　　研究方向：数学类各方向

试题名称：数学分析　　　　试题编号：604

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效）

一、填空题（本题共5小题，每小题6分，满分30分。把答案填在答题纸上，并注明题目番号）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=$__________________。

2. 已知$x_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=$______________。

3. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$a=$________，$b=$________。

4. 设函数$y=y(x)$由$x^{\frac{1}{y}}=y^{\frac{1}{x}}$所确定，则$\frac{dy}{dx}=$__________________。

5. 设$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{\alpha x}=\int_{-\infty}^{\alpha}te^t dt$，则常数$\alpha=$________________。

二、选择题（本题共5小题，每小题6分，满分30分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸上，并注明题目番号）

1. 设对任意的x，总有$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，

则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$　　　　【　　】

A. 等于零　　B. 存在但不等于零　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

2. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)=$ 【　　】

A. xy　　B. $2xy$　　C. $xy+\dfrac{1}{8}$　　D. $xy+1$

3. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为 【　　】

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　D. 存在间断点 $x=-1$

4. 设 f 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=$ 【　　】

A. $n[f(x)]^{n+1}$　　B. $n![f(x)]^{n+1}$

C. $(n+1)[f(x)]^{n+1}$　　D. $(n+1)![f(x)]^{n+1}$

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是 【　　】

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

三、计算题（本题满分 15 分）

设实数 $a<1$，且直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围图形 D_1 的面积为 S_1，直线 $y=ax$ 和直线 $x=1$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围图形 D_2 的面积为 S_2．

（1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）求该最小值所对应的平面图形 $D_1\cup D_2$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积．

四、（本题满分 15 分） 设函数 f 在[0，1]上可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$．

五、（本题满分 20 分）

设 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并有 $\int_0^1 \varphi(tx)dt = a\varphi(x)$ 其中 a 为常数。求 $\varphi(x)$ 的表达式.

六、（本题满分 20 分）讨论下列级数的敛散性（若收敛应指出是否条件收敛或绝对收敛）

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其中 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}} + o(\frac{1}{n^{2p}})$，$p > 0$ 为常数.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right]$，其中 $p > 0$ 为常数.

七、（本题满分 20 分）

设 f, g 都在 $[0,1]$ 上递增且连续，证明：

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx .$$