

西南大学

2008年攻读**博**士学位研究生入学考试试题

学科、专业：**数学学科所有专业**

研究方向：**数学学科所有方向**

试题名称：**高等代数**

试题编号：**819**

(答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效)

注意：报考数学教育方向的考生完成1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10题，报考其余方向的考生完成1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8题。考试时间为3小时，满分为150分。

1. 填空(每小题5分, 共30分)

(1) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}$ 的全部根是_____。

(2) 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a$, $|B| = b$. 令 $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则

$|C| =$ _____。

(3) 元素为整数的3阶正交矩阵共有_____个。

(4) 设 A 为数域 F 上 n 阶矩阵, A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解是_____。

(5) 设4阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, E 为4阶单位矩阵,

则行列式 $|B^{-1} - E| =$ _____。

(6) 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____。

2. (20分) 用正交线性替换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

为标准形。

3. (20分) 计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

4. (20分) 在欧氏空间 R^n 中定义变换 σ :

$$\sigma(\alpha) = \alpha - k(\alpha, \varepsilon)\varepsilon, \forall \alpha \in R^n,$$

其中 ε 为 R^n 中单位向量, k 为实数, (α, ε) 表示 R^n 中内积。

(1) 证明 σ 为线性变换; (2) 求 k , 使 σ 为正交变换。

5. (15分) 证明:

$$W = \{f(x) \in R[x] \mid f(1) = 0, \deg f(x) \leq n \text{ 或 } f(x) = 0\}$$

关于多项式加法及数与多项式的数乘构成实数域 R 上线性空间, 并求出它的一个基底及它的维数。其中 $\deg f(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的次数。

6. (15分) 证明: 关于任意素数 p , 多项式

$$f(x) = px^4 + 2px^3 - px + (3p-1)$$

在有理数域上不可约。

7. (15分) 设 $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ 为数域 F 上两个多项式, H 为 F 上 n

阶方阵, $A = f(H)$, $B = g(H)$ 。证明 $ABX = 0$ 的每一解 X 都可唯一表为 $X = Y + Z$,

其中 Y, Z 皆为 n 阶方阵, 且 $BY = 0$, $AZ = 0$ 。

8. (15分) 设 σ, τ, δ 为复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换, 若 $\sigma\tau - \tau\sigma = \delta$, $\sigma\delta = \delta\sigma$, $\tau\delta = \delta\tau$, 则 δ 的特征根全为零。

9. (15分) 已知矩阵 A, B , $A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆。

10. (15分) 令 V 为复数域上一个 n 维线性空间, σ, τ 是 V 的线性变换, 且 $\sigma\tau = \tau\sigma$ 。

(1) 证明 σ 的每一特征子空间都在 τ 之下不变;

(2) $\sigma^{-1}\tau$ 在 V 中有一公共特征向量。