西南大学

年攻读 博/硕 士学位研究生入学考试试题

学科、专业：农业机械化工程　　研究方向：082801

试题名称：数学二(单考)　　试题编号：702

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效）

一、填空题（将正确的答案填在"—"线上。每小题 3 分，共 15 分）：

1、$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)^2}=$______.

2、设 $f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ 为连续函数，则 $a=$______.

3、设 $u=z^{xy}$，则在（1，1，1）处的全微分 $du=$______ dz______.

4、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)dx=$______.

5、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $AB^T=$______.

二、单项选择题（将正确的结论的代号填在 () 内。每小题 3 分，共 15 分）：

1、设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{[f(x)]^2-[f(x_0)]^2}{x-x_0}=$（　　）.

A. $f'(x_0)$　　B. $f(x_0)$　　C. $2f'(x_0)f(x_0)$　　D. 0

2、设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可微，且 $xf''(x)-f'(x)<0$，则 $\dfrac{f'(x)}{x}$ 在区间（0，a）内是（　　）.

A. 单调增加.　　B. 单调减少.　　C.不增　　D. 不减.

3、函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处(　　).

A.无定义　　B.不连续　　C.连续，但不可导　　D.连续且可导

4、设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=$（　　）.

A. $2xf(x^2)-f(x)$　　B. $2xf(x^2)$　　C. $f(x)$　　D. $(2x-1)f(x)$

5、设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ 可以由向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ 线性表出，则（　　）

A. 秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}=$ 秩 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$　　B. 秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}\leq$ 秩 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$

C. 秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}\geq$ 秩 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$　　D. A、B、C 均不正确

三、（满分 20 分）讨论函数 $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$，求出（1）定义域；（2）函数的单调递增区间，单调递减区间；（3）极值；（4）拐点；（5）渐近线；（6）做出草图.

四、简算题（每小题 6 分，共 30 分）：

1、设 $xe^y+ye^x=1$ 确定的隐函数为 $x=x(y)$，求 $\dfrac{dx}{dy}$.

2、求积分 $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

3、设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}(x^3+b) & x\leq 1 \\ \sqrt[3]{x} & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 可导，求其中的 a,b.

4、求微分方程 $y'+2y=e^{3x}$ 的通解.

5、已知线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解，求 λ.

五、（满分30分）求正交变换矩阵P使得下面的矩阵A正交相似于对角阵，要求写出P及与A相似的对角阵。这里

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

六、（满分30分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在 (a,b) 内 $f(x)>0$，$f(a)=0$ 证明：

（1）在 (a,b) 内存在点 ξ，使得 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（2）在 (a,b) 内存在点 $\eta(\eta\neq\xi)$，使得 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$.